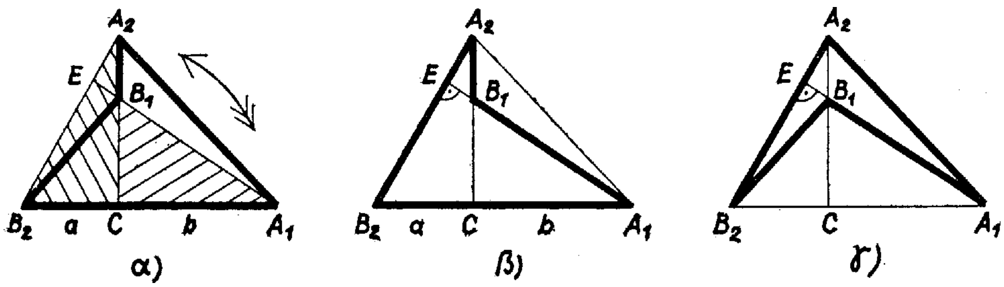
I. Legyen az $A_1B_1C = D_1$ derékszögű háromszögben $B_1C = a \leq CA_1 = b < A_1B_1 = c$, és forgassuk $D_1$-et $C$ körül az $A_2B_2C = D_2$ helyzetbe úgy, hogy $A_2$ a $CB_1$ félegyenesen legyen; ekkor $B_2$ az $A_1C$ félegyenesen van, $B_1$ pedig az $A_1A_2B_2$ háromszög belsejében, vagy azonos $A_2$-vel. (A forgatás iránya nem lényeges, mert az 1, 2 indexeket felcserélve $D_1$ ellentétes irányú fordulással jut $D_2$-be, és a vizsgálandó alakzat csúcspontjai mégis ugyanazok a pontok.)



*1. ábra*

Az $A_1A_2B_1B_2 = N_1$ négyszög (1. ábra $\alpha$ része) két átlója a $D_1$ és $D_2$ átfogója, így egyenlők és a forgatás miatt merőlegesek. Messe az $A_1B_1$ egyenes $A_2B_2$-t $E$-ben, ekkor, idomok területét ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat:

$$N_1 = A_1B_1A_2 + A_1B_1B_2 = \frac{A_1B_1 \cdot A_2E}{2} + \frac{A_1B_1 \cdot EB_2}{2} =$$
$$= \frac{A_1B_1}{2}(A_2E + EB_2) = \frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

másrészt a $B_1C$ szakasz mentén kettévágva

$$N_1 = A_1A_2C + B_1B_2C = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2},$$

és e két előállítás egyenlősége Pitagorasz tételét adja. – A $b = a$ esetében $B_1$ azonos $A_2$-vel és $E$-vel is, így $N_1$ elfajul az $A_1B_1B_2$ egyenlő szárú derékszögű háromszöggé, és a bizonyítás még egyszerűbbé válik.

Felhasználtuk a következő tételeket: forgatás változatlanul hagyja az idom oldalait és szögeit, részekre bontott idom területe egyenlő összes részei területének összegével, továbbá a háromszög területképletét. Egyik tétel bizonyításában sem használtuk fel a bizonyítandó tételt, így bizonyításunk helyes.

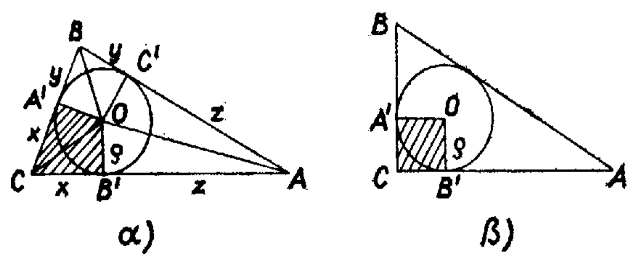
II. A beírt kör sugarának ajánlott kifejezése így alakítható:

$$\varrho = \frac{s}{2} - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Ezt az ajánlott területképletbe beírva, másrészt a területet a befogókkal is kifejezve

$$t = s\varrho = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - c^2] = \frac{1}{2}ab,$$

amiből átrendezéssel $a^2 + b^2 = c^2$.



*2. ábra*

A $t = \varrho s$ képlet a háromszög három, $\varrho$ magasságú háromszögre bontásából adódik (2. ábra $\alpha$ része) – alapjaik az egyes oldalak – ezekre alkalmaztuk a területképletet. A sugár képlete abból adódik, hogy a kör $O$ középpontja, a háromszög egy csúcsa, és a belőle húzott érintők érintési pontjai, pl. $C$, $A'$ és $B'$, mindig egy deltoid csúcsai, az érintőszakaszok egyenlők, együttes hosszuk a kerületből az $AB$ oldal kétszeresének elhagyásával adódik, továbbá hogy $ACB\sphericalangle = 90°$ esetén e deltoid négyzetté specializálódik (2. ábra $\beta$ része), oldalai egyenlők. Ezekben sem használtuk fel Pitagorasz tételét.

*Cserha Gabriella* (Makó, József A. g. I. o. t.)

*Megjegyzések.* Az I. részben az $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ csúcsokat két további sorrend szerint bejárva ugyancsak konkáv négyszöget kapunk. Ezekből is kapunk egy-egy, a fentitől különböző bizonyítást.

Az $A_1B_1A_2B_2 = N_2$ négyszög területét (1. ábra $\beta$ része) egyrészt $D_1$ és $D_2$ összegeként, másrészt az $A_1A_2B_2$ és $A_1A_2B_1$ háromszögek különbségeként állítjuk elő. $A_2B_1E$ és $D_1$ hasonlók, ezért

$$B_1E = e = \frac{B_1A_2}{B_1A_1} \cdot B_1C = \frac{a(b-a)}{c}, \qquad A_1E = c + e = \frac{c^2 + ab - a^2}{c},$$
$$N_2 = A_1A_2B_2 - A_1A_2B_1 = \frac{c \cdot A_1E}{2} - \frac{b(b-a)}{2} = 2D_1 = ab,$$
$$\frac{1}{2}(c^2 + ab - a^2 - b^2 + ab) = ab,$$

és ez rendezéssel a tételt adja. – A fenti tételeken túl felhasználtuk, hogy két idom különbségeként előálló idom területe egyenlő azon idomok területének különbségével, és hogy hasonló idomok megfelelő oldalainak aránya egyenlő.

Végül az $A_1A_2B_2B_1 = N_3$ négyszögre (1. ábra $\gamma$ része) hasonlóan

$$N_3 = A_1A_2B_2 - A_1B_1B_2 = A_1A_2B_1 + B_2A_2B_1 = \frac{B_1A_2 \cdot A_1B_2}{2},$$
$$c(c+e) - a(a+b) = c^2 - 2a^2 = b^2 - a^2,$$

ezt kellett bizonyítanunk. $B_1 = A_2$ esetén $N_3$ területe 0.