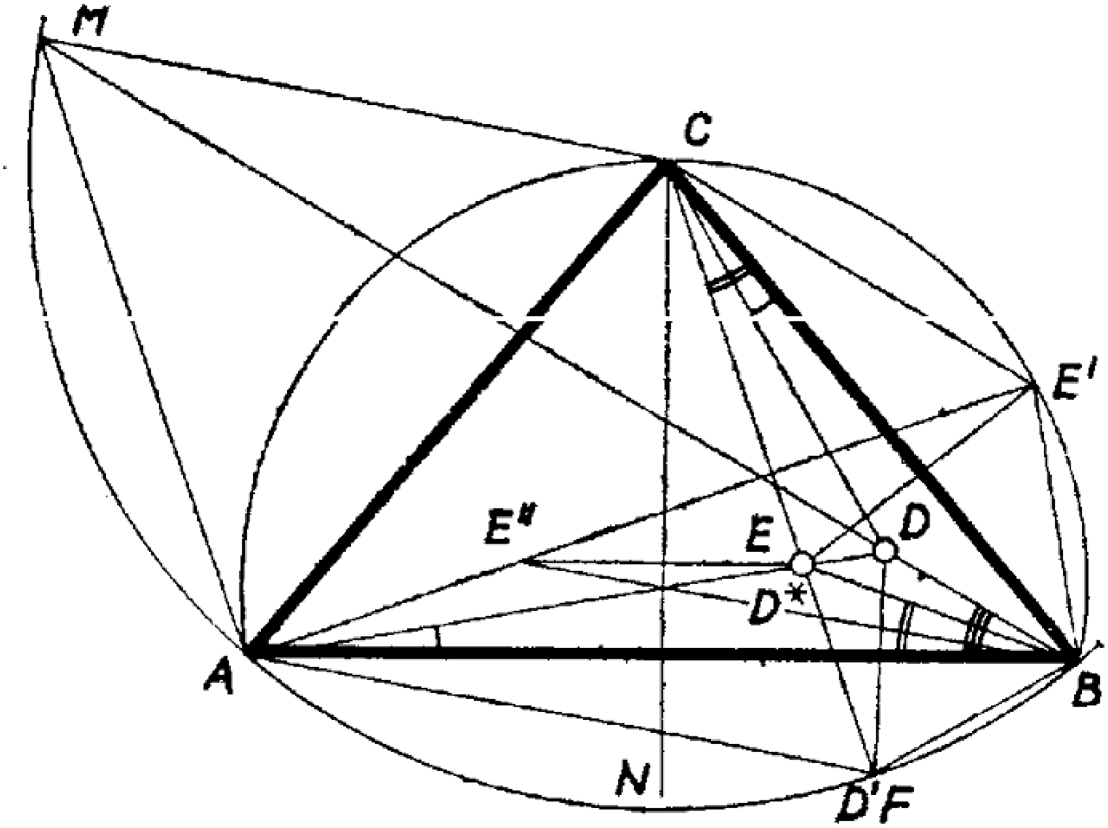
I. megoldás. Az ABC háromszög A-nál és B-nél levő szöge 50°, így $EBC\sphericalangle = 30^\circ$. Legyen E tükörképe BC-re E' (1. ábra), ekkor az $EBE'\triangle$ szabályos, mert $EBE'\sphericalangle = 2 \cdot EBC\sphericalangle = 60^\circ$, és $EB = E'B$. Másrészt $ABE\triangle \simeq AEE'\triangle$, mert E-ből induló oldalaik egyenlők, továbbá $AEB\sphericalangle = 180^\circ - EAB\sphericalangle - EBA\sphericalangle = 150^\circ$, és $AEB\sphericalangle + BEE'\sphericalangle = 210^\circ$, tehát $AEE'\sphericalangle = 150^\circ$. Eszerint az $ABE'\triangle$ egyenlő szárú és $AE'B\sphericalangle = ABE'\sphericalangle = ABE\sphericalangle + EBE'\sphericalangle = 80^\circ$, tehát E' az $ABC\triangle$ köré írt körön van. Így $ECB\sphericalangle = E'CB\sphericalangle = E'AB\sphericalangle = 2EAB\sphericalangle = 20^\circ$, amint a feladat állítja.



1. ábra

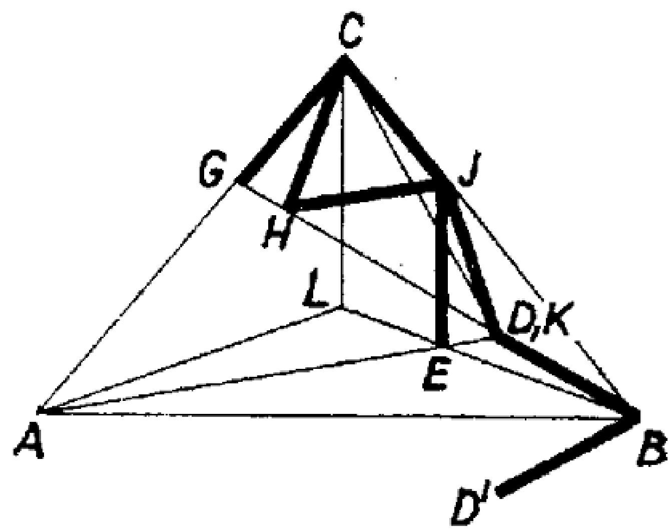
Tükrözzük az AD egyenest AB-re, és messe a képét a CE egyenes F-ben. Ekkor az $ACF\triangle$ egyenlő oldalú, mert A-nál és C-nél 60°-os szöge van, így $FC = AC = BC$. Eszerint a $BCF\triangle$ egyenlő szárú, $CBF\sphericalangle = (180^\circ - BCF\sphericalangle)/2 = 80^\circ$, és $ABF\sphericalangle = 30^\circ = ABD\sphericalangle$, vagyis F a BD egyenes AB-re vonatkozó tükörképén is rajta van, tehát azonos D-nek AB-re való D' tükörképével. Ezért $BF = BD$, a $BDF\triangle$ egyenlő oldalú, D rajta van BF felező merőlegesén. Ugyanez áll C-re is, így CD a BCF egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye, felezi a $BCF = BCE$ szöget, tehát $BCD\sphericalangle = 10^\circ$, ami a feladat első állítása.

Megjegyzések. 1. A D' tükörképből kiindulva belátható, hogy a $BDD'\triangle$ és a $CAD'\triangle$ szabályos, utóbbi azért, mert A-nál 60°-os szöge van és a $CD' > CA = CB$, $CD' < CA$ feltételek ellentmondásra vezetnek. Így $D'AD\triangle \simeq D'CB\triangle$, mindkettő egyenlő szárú, a szárak közt 20°-os szöggel. Másrészt a középponti és kerületi szögek összefüggése alapján belátható, hogy E a D' középpontú, B-n és D-n átmenő körön van. Így $ED'D\sphericalangle = 2 \cdot EBD\sphericalangle = 20^\circ$, amiből következik, hogy E az AD és CD' egyenesek metszéspontja. Ezekből már következik a feladat mindkét állítása.

2. Mesterkéltebb, de egyszerűbb az ábra következő származtatása. Legyen a $BCD'\triangle$-ben $BC = D'C$ és $C\sphericalangle = 20^\circ$. Forgassuk ezt el D' körül 60°-kal a DAD' helyzetbe úgy, hogy D a $BCD'\triangle$ belsejében legyen. Ekkor az $ACD'\triangle$ is szabályos; továbbá AD és CD' metszéspontját E-vel jelölve $DD'E$ 20°-os csúcsszögű egyenlő szárú háromszög. Így az $ABC\triangle$ és a D, E pont teljesíti a feladat feltételeit, és nyilvánvalóan teljesülnek az állítások is.

(Tusnády Gábor)

II. megoldás. Messe BD az AC-t G-ben (2. ábra), ekkor $GBC\sphericalangle = 20^\circ$ miatt $BGC\sphericalangle = 80^\circ = BCG\sphericalangle$, és $GDA\sphericalangle = 40^\circ = CAD\sphericalangle$ miatt BCG és ADG egyenlő szárú háromszögek, $GB = CA$, és $CG = CA - GA = GB - GD = DB$. Legyen H, K, J a BG, ill. BC száron az a pont, amelyre $CG = CH = HJ = JK$; megmutatjuk, hogy K azonos D-vel. Valóban, így $CHG\sphericalangle = 80^\circ$, $GCH\sphericalangle = 20^\circ$, $HCJ\sphericalangle = HJC\sphericalangle = 60^\circ = CHJ\sphericalangle$, $JHK\sphericalangle = JKH\sphericalangle = 40^\circ$, $HJK\sphericalangle = 100^\circ$, $KJB\sphericalangle = 20^\circ = KBJ\sphericalangle$, ekkor pedig $BK = JK = CG = BD$, ami igazolja állításunkat. Mivel még $JC = JH = JD$, és $CJD\sphericalangle = 160^\circ$, azért a CJD egyenlő szárú háromszögből $JCD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 10^\circ$, q. e. d.



2. ábra

Messe az $ABC\triangle$ szimmetriatengelyét a BE egyenes az L pontban. Ekkor AE az $LAB\triangle$ szögfelezője, és $LAB\triangle \sim DBJ\triangle$, így

$$LE : EB = LA : BA = DB : JB = CJ : JB,$$

ezért $JE \| CL$. Ebből $EJB\sphericalangle = LCB\sphericalangle = 40°$, így egyrészt $EJD\sphericalangle = 20°$, másrészt $EDJ\sphericalangle = EDG\sphericalangle + GDJ\sphericalangle = 80°$, ennélfogva a $DEJ\triangle$-ben $DEJ\sphericalangle = 80° = EDJ\sphericalangle$, tehát $EJ = DJ = CJ$. Mivel még $EJC\sphericalangle = 140°$, azért az EJC egyenlő szárú háromszögből $ECJ\sphericalangle = 20°$, q. c. d.

Berács József (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. II. o. t.)

III. megoldás. A két állítást egymástól függetlenül bizonyítjuk. Az elsőhöz elég azt belátni, hogy $DCA\sphericalangle = 70°$. Ez igaz, ha $DA = CA$; ezt bizonyítjuk. Messe a BD egyenes a C körül írt $CA = CB$ sugarú kört másodszer M-ben (1. ábra). Ekkor $MCA\sphericalangle = 2 \cdot MBA\sphericalangle = 60°$, ezért ACM egyenlő oldalú háromszög, továbbá $AMB\sphericalangle = ACB\sphericalangle/2 = 40°$. Így pedig $DAM\sphericalangle = 100°$, $ADM\sphericalangle = 40° = AMD\sphericalangle$, és végül $AD = AM = AC$.

A második állításhoz elég azt belátni, hogy CE negyedeli a BCA szöget, vagy ami ugyanaz, felezi a BCN szöget, ahol CN az $ABC\triangle$ szimmetriatengelye. Legyen E tükörképe BC-re E', CN-re E''. Ekkor $EE'' \| AB$, $BE''E\sphericalangle = E''BA\sphericalangle = EAB\sphericalangle = 10°$, vagyis BE'' felezi az $ABE\sphericalangle = 20°$ szöget, és így $EE'' = EB$. Másrészt, mint már láttuk, $EE'' = EB$, ezért $EE'' = EE'$. E a BCN szög mindkét szárától fele ekkora távolságban van, tehát EC valóban felezi a szöget.

Sax Gyula (Budapest, Kölcsey F. g. I. o. t.)

Megjegyzés. $DA = CA$ bizonyításához segítségül vehetjük az AB alap fölé a C-t tartalmazó partján szerkesztett ABC_1 egyenlő oldalú háromszög C_1 csúcsát is. Ekkor $AC_1 = AB$, $C_1AC\sphericalangle = 10° = BAD\sphericalangle$, $AC_1C\sphericalangle = 30° = ABD\sphericalangle$, így $ACC_1\triangle \simeq ADB\triangle$, $AC = AD$.

Sax Gyula