Szorozzuk meg (2)-t x_1-gyel. A bal oldal utolsó két tagjából a-t kiemelve a zárójelben (1) első két tagjának -1-szerese adódik, ami a^2-nel egyenlő, így

$$x_1x_2x_3 + a(-x_1x_2 + ax_1) = x_1x_2x_3 + a \cdot a^2 = 0,$$

vagyis (4) fennáll.

(1)-et $-x_3$-mal szorozva és mindjárt felhasználva (4)-et

$$a^3 + ax_3x_1 - a^2x_3 = a(x_3x_1 - ax_3 + a^2) = 0.$$

Mivel $a \neq 0$, különben ugyanis (1)-ből $x_1x_2 = 0$, amit a feltevés kizárt, azért itt a zárójeles kifejezés 0, vagyis (3) fennáll.

(1)-ből, ill. (2)-ből

$$x_1 = \frac{a^2}{a - x_2}, \quad \text{ill.} \quad x_3 = a - \frac{a^2}{x_2} = \frac{a(x_2 - a)}{x_2}.$$

Itt $a - x_2 \neq 0$, különben (1)-ből bármely x_1 esetén $a = 0$, ami lehetetlen.
Ezekkel

$$x_1 - x_2 = \frac{a^2 - ax_2 + x_2^2}{a - x_2}, \quad x_2 - x_3 = \frac{x_2^2 - ax_2 + a^2}{x_2},$$
$$x_3 - x_1 = \frac{-a(x_2 - a)^2 - a^2x_2}{x_2(a - x_2)} = \frac{-a(x_2^2 - ax_2 + a^2)}{x_2(a - x_2)}.$$

A 3 számláló közös tényezője nem 0, mert eltűnése esetén x_1, x_2 és x_3 egyenlők lennének. Így (5) bal oldala

$$\frac{(a - x_2) + x_2}{x_2^2 - ax_2 + a^2} - \frac{x_2(a - x_2)}{a(x - ax_2 + a^2)} = \frac{a^2 - ax_2 + x_2^2}{a(x_2^2 - ax_2 + a^2)} = \frac{1}{a},$$

tehát (5) is fennáll.

Szalay István (Budapest, Piarista g. II. o. t.)