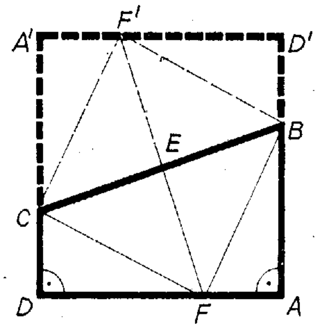
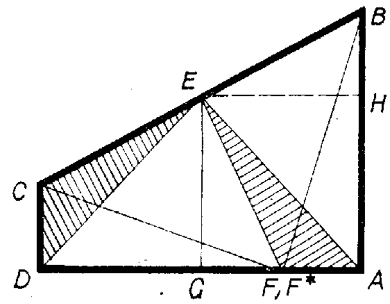
I. megoldás. Legyen az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD \perp AD$, és messe a BC szárra az E felezőpontjában emelt merőleges az AD egyenest F-ben. Azt kell belátnunk, hogy $BFC\sphericalangle = 90°$.





Tükrözzük az alakzatot az E pontra, így B és C egymásba megy át, és jelöljük A, D, F képét rendre A'-vel, D'-vel, F'-vel. Ezek rendre DC, AB, FE meghosszabbítására esnek, és $D'A = DA' = DC + CA' = DC + BA = AD$. Így $ADA'D'$ egy négyzet, és E a középpontja, F' az $A'D'$ oldalon van. Másrészt $FF' \perp BC$, így FF' a négyzet E körüli $90°$-os elforgatásával a BC szakaszba megy át, tehát $BFCF'$ is négyzet, BFC pedig derékszögű háromszög, amint a feladat állítja.

Csomor Rita (Székesfehérvár, Ybl M. g. I. o. t.)

II. megoldás. Használjuk az előbbi jelöléseket, és legyen AD felezőpontja G. Ekkor GE a trapéz középvonala, a feltevés szerint $GE = GA$, AEG és DEG egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek, $AE = DE$. Válasszuk a jelölést úgy, hogy $CD < AB$, ekkor $DCE\sphericalangle > 90° > CEG\sphericalangle > 45°$, ezért EF a GEA szögtartományban halad, F az AG szakaszon van, DCE és AFE merőleges szárú tompaszögek, egyenlők. Mivel még $FAE\sphericalangle = CDE\sphericalangle = 45°$, azért az AEF és DCE háromszögek egybevágók, $FE = CE$, F a BC átmérő fölötti Thalész-körön van, a $BFC\sphericalangle$ derékszög, q. e. d. Az állítás $CD = AB$ esetén is igaz.

Podhraczky István (Debrecen, Református koll. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Hasonlóan adódik az állítás az EGF és EHB háromszögek egybevágó voltából, ahol H az E vetülete AB-n ($EG = EH$, $G\sphericalangle = H\sphericalangle$, $E\sphericalangle = E\sphericalangle$).

III. megoldás. Mérjük fel a CD alapot A-tól D felé, és legyen a végpont F^*. Az ABF^* és DF^*C derékszögű háromszögek egybevágók, mert $AD = AB + CD > CD = AF^*$ miatt F^* az AD szakaszon van, így $DF^* = AB$, ennélfogva $BF^* = CF^*$, vagyis F^* azonos a fenti F ponttal. Így AFB és DFC pótszögek, és $BFC\sphericalangle = 90°$.

Fáy Kiss István (Budapest, Piarista g. I. o. t.)

Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet egy téves okoskodásra. Többen a DFC és ABF háromszögek egybevágó voltát abból vélték bizonyítani, hogy egybevágóság áll fenn egyrészt az $ABEF$ és $DFEC$ négyszögek között, mert „egyenlők az összes szögeik és átlóik is páronként: $AE = DE$, $BF = FC$", másrészt a BEF és FEC háromszögek között, és egybevágó idomok megfelelő részeit elhagyva egybevágó idomok maradnak vissza. Az idézőjelbe tett rész nem elegendő az egybevágósághoz, hiszen így pl. az egy körbe beírt összes téglalapok egybevágók volnának. Ez a meggondolás nem használta fel az $AD = AB + DC$ összefüggést.