I. megoldás. Képezzük először K első két törtjének összegét. Közös nevezőnek az $N=(a-b)(b-c)(c-a)$ szorzatot véve a számláló így alakítható:

$$S=(a^2-b^2)(a^3+b^3)+(b^2-c^2)(b^3+c^3)=$$
$$-(c^5-a^5)+(c^3-a^3)b^2-(c^2-a^2)b^3.$$

Itt mind a három zárójeles kifejezés osztható $c-a$-val, tehát S/N egyszerűsíthető $c-a$-val.

Egyszerűsítés után az első két tag S/N összegének nevezője ugyanaz, mint K harmadik tagjáé, tehát közvetlenül összeadhatók. Számlálóik összege így alakítható:

$$\begin{aligned}&-(c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4)+(c^2+ca+a^2)b^2-(c+a)b^3+\\&+(a+c)(a^3+c^3)=b^2c(a-b)+ab^2(a-b)-c^2(a^2-b^2)=\\&=(a-b)\left[b^2c+ab^2-c^2(a+b)\right]=(a-b)\left[bc(b-c)+a(b^2-c^2)\right]=\\&=(a-b)(b-c)(bc+ab+ac),\end{aligned}$$

ezt osztva a közös nevezővel, a kifejezést

$$K=ab+bc+ca$$

alakban írhatjuk, feltéve, hogy a, b, c közt nincs két egyenlő érték.

Török Bálint (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás. K-t közös nevezőre hozva S_1/N_1 alakban írhatjuk, ahol
$S_1=(a^2-b^2)(a^3+b^3)+(b^2-c^2)(b^3+c^3)+(c^2-a^2)(a^3+c^3)$,
$N_1=(a-b)(b-c)(c-a)$.
S_1-ben b helyébe a-t helyettesítve azonosan 0-t kapunk, tehát a számlálónak tényezője $a-b$. Hasonlóan kapjuk, hogy S_1 osztható $b-c$-vel, és $c-a$-val is. Így várható, hogy e három tényező szorzata, azaz N_1 is kiemelhető S_1-ből, tehát $S_1=N_1K_1$, ahol K_1 szimmetrikus polinom, hiszen K is szimmetrikus a változóiban.

Mivel S_1 ben csak ötödfokú tagok szerepelnek, K_1-ben csak másodfokúak szerepelhetnek,

$$K_1=\lambda(a^2+b^2+c^2)+\mu(ab+bc+ca).$$

a^4b együtthatója S_1-ben 0, N_1K_1-ben $-\lambda$, tehát $\lambda=0$; a^3b^2 együtthatója S_1-ben -1, N_1K_1 ben $-\mu$, tehát $\mu=1$, így $K_1=ab+bc+ca$.

Beszorzással könnyen ellenőrizhető, hogy valóban $N_1K_1=S_1$, tehát $K=K_1$.