Mindegyik behelyettesítés könnyebbé válik, ha a polinomot $x-1$ hatványai szerint rendezzük át, meghatározva az új együtthatókat. A

$$P(x) \equiv Q(x-1) = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

követelménynek minden x-re teljesülnie kell. x értékét 1-nek, 0-nak és 2-nek választva egyszerű egyenletrendszert kapunk a, b, c-re:

$$\begin{array}{lll} x=1, & P(1)=Q(0), & -6=c, \\ x=0, & P(0)=Q(-1), & -1=-1+a-b+c, \\ x=2, & P(2)=Q(1), & -11=1+a+b+c, \end{array}$$

innen $c=-6$, $a=0$, $b=-6$, tehát

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \equiv (x-1)^3 - 6(x-1) - 6.$$

Most már

$$\begin{aligned} &P(x_1) = P\left(1-\sqrt{2}\right) = Q\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 6 = 4\sqrt{2} - 6, \\ &P(x_2) = Q\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} - 6; \qquad P(x_1) + P(x_2) = -12; \\ &P(x_3) = Q\left(-2\sqrt{2}\right) - 4\sqrt{2} - 6, \qquad P(x_4) = Q\left(2\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 6, \\ &P(x_3) + P(x_4) = -12, \end{aligned}$$

a két összeg valóban egyenlő. – Végül

$$\begin{gathered} P(x_5) = Q\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 - 6\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) - 6 = \\ 2 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} + 4 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} - 6 = 0, \end{gathered}$$

vagyis a $P(x)=0$ egyenlet egyik gyöke x_5.

Békéssy Péter (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A fenti két összeg egyenlősége bármely a paraméterrel meghatározott $x_1 = 1-a$, $x_2 = 1+a$, $x_3 = 1-2a$, $x_4 = 1+2a$ értéknégyes esetében fennáll.

Bod Judit (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)