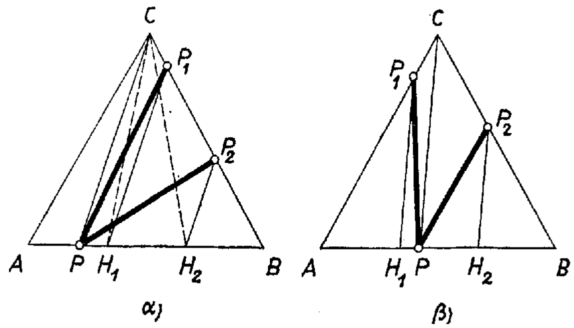
Legyen az adott háromszög ABC, az adott belső pont az $AB = a$ oldalon P, a BC oldalon Q. Előírhatjuk, hogy az első vágás P-ből induljon ki; ennek egyik oldalán 1, a másikon 2 résznek kell lennie, tehát a háromszög t területét 1:2 arányban kell kettévágnia. Forgassunk egy félegyenest P körül a PA helyzetből kiindulva, PC-n át a PB helyzetig és tekintsük a háromszögből a félegyenes két oldalára eső részek területének arányát. Az A-t tartalmazó rész területe egyre nő, a másiké fogy, így az arány tetszés szerinti kicsiny (pozitív) értéktől tetszés szerinti nagy értékig minden értéket felvesz, és csak egyszer, tehát az $1/2$ és a $2/1$ értéket is, így első vágásként a félegyenes két helyzete felel meg. E két helyzet az alábbiak szerint szerkeszthető.

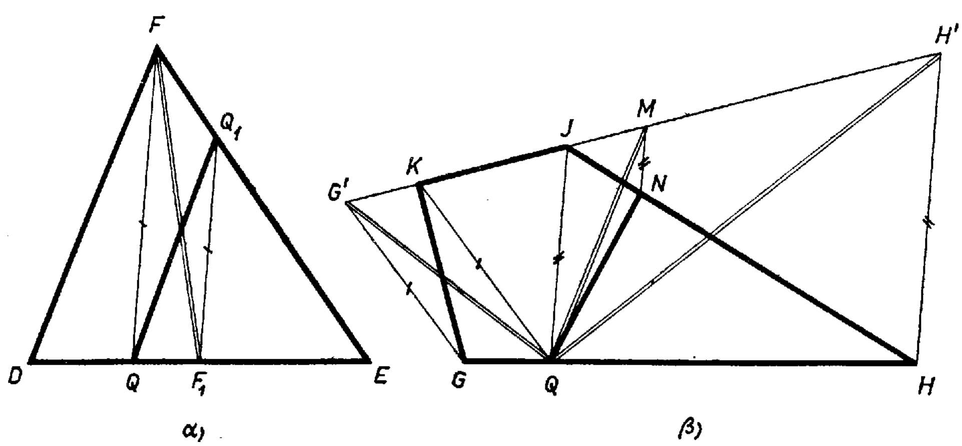


1. ábra

Legyenek az AB oldal harmadoló pontjai H_1, H_2 úgy, hogy $AH_1 = H_1H_2 = H_2B$. Húzzunk párhuzamost H_1-en és H_2-n át a PC egyenessel, és messék ezek az ACB törött vonaldarabot P_1-ben, ill. P_2-ben. Ekkor PP_1 és PP_2 a megfelelő vágások. Legyen ugyanis először P az AB oldal egyik szélső harmadán, mondjuk AH_1-en, akkor P_1, P_2 mindegyike C és B között adódik (esetleg $P_1 = C$, ha ti. $P = H_1$), mert H_1P_1 és H_2P_2 kiindulópontja P és B között van (1. ábra α része). A $PBP_2\triangle$ területe $t/3$, a $PBP_1\triangle$-é pedig $2t/3$, mert az előbbi egyenlő a $H_2BC\triangle$, az utóbbi a $H_1BC\triangle$ területével, ezeknek ABC-vel közös az AB-re merőleges magasságuk, alapjuk pedig $a/3$, ill. $2a/3$, és így területük $t/3$, ill. $2t/3$. Valóban, a PBP_i és H_iBC háromszögek $(i = 1{,}2)$ H_iBP_1 része közös, és a H_iP_i egyenes másik partján levő részeik területe is egyenlő, mert a H_iP_1 alapjuk közös, és erre merőleges magasságuk egyenlő. Így a $PP_2P_1\triangle$ területe is és az APP_1C négyszög területe is $t/3$.

A $PBP_2\triangle$-re adott bizonyításunk akkor is érvényes, ha P a H_1H_2 szakaszon van, mert P_2 ilyenkor is BC-n adódik (1. β ábrarész). Ilyen esetben P_1 az AC-n van, és a $PAP_1\triangle$ területe a $H_1AC\triangle$-ével egyenlő, ez is $t/3$.

A talált két vágási lehetőség közül számunkra az lesz megfelelő, amelyik a Q második kiinduló pontot a kettévágott háromszög nagyobb részébe juttatja. A két vágás közül legalább az egyik ilyen; ha pedig így mindkettő megfelel, akkor PP_1 és PP_2 bármelyikét vehetjük első vágásszakasznak. A kiszemelt vágás a háromszöget egy háromszögre és egy (konvex) négyszögre vágja szét (vagy kivételesen 2 háromszögre, ha ti. P éppen H_1-ben vagy H_2-ben van). Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy háromszöget is, négyszöget is lehet két egyenlő részre vágni a kerületének adott pontjából kiinduló egyenes vágással, hiszen Q kerületi pontja a levágott $2/3$ résznek.



2. ábra

Legyen Q a $DEF\triangle$ DE oldalának pontja. Húzzunk párhuzamost a DE oldal F_1 felezőpontján át QF-fel, ez metszi ki a háromszög kerületéből a vágás Q_1 végpontját (2. ábra α része), mert $F_1Q_1Q\triangle = F_1Q_1F\triangle$, $QEQ_1\triangle = F_1EF\triangle = DEF\triangle/2$.

Legyen Q a $GHJK$ négyszög GH oldalán és messük JK-t a G-n átmenő, QK-val párhuzamos egyenessel G'-ben, valamint a H-n átmenő, QJ-vel párhuzamos egyenessel H'-ben (2. β ábrarész). A fentiekhez hasonlóan látható, hogy a négyszög területe egyenlő a $QG'H'\triangle$-ével, és hogy az utóbbit megfelezi a $G'H'$ szakasz M felezőpontját Q-val összekötő egyenes vágás, ami egyszersmind a négyszöget is felezi, amennyiben M a JK szakaszon adódik.

Az ellenkező esetben válasszuk a betűzést úgy, hogy M a JH' szakaszra essék. Ekkor a $QJKG$ négyszög területe kisebb a $GHJK$ négyszög területének felénél, mert az utóbbi a $QMG'\triangle$ területével egyenlő, az előbbi pedig a $QJG'\triangle$-ével. Különbségük a $QMJ\triangle$. Ezzel egyenlő területet úgy vághatunk le a $GHJK$ négyszög további részéből, a $QHJ\triangle$-ből, hogy az M-en átmenő, QJ-vel párhuzamos egyenesnek HJ-vel való N metszéspontjába irányítjuk a Q-ból kiinduló vágást; így ugyanis a $QNJ\triangle$ területe egyenlő a különbözettel.

Minden lehetséges esetre eljárást adtunk a második vágás végpontjának kijelölésére, a feladatot megoldottuk.

Amennyiben az első vágást Q-ból indítjuk el, lehetséges, hogy más két vágást kapunk. Ezt a kérdést azonban nem vizsgáljuk, mert a feladat nem írja elő a P, Q pontpárból lehetséges összes vágáspárok előállítását.

Sehol nem használtuk ki az $ABC\triangle$ egyenlő oldalú voltát, sem P-nek és Q-nak A, B, C-től, valamint egymástól különböző voltát, így eljárásunk bármely háromszög kerületén bárhogyan választott két kiindulási vágáspont esetén érvényes.

Koren András (Budapest, I. István g. II. o. t.)
Bozóky-Szeszich Ádám (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)