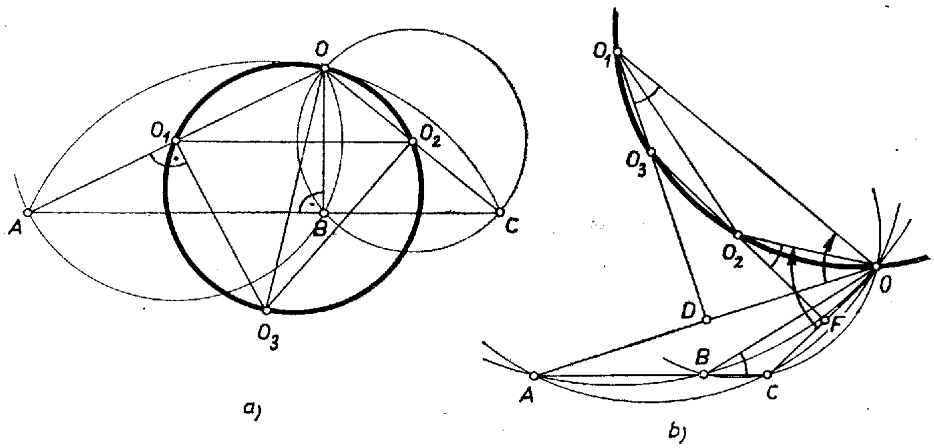
Az $O_1O_2O_3\Delta$ köré írt kör megszerkesztésében az A, B, C csúcsok szerepe felcserélhető, ezért választhatjuk a betűzést úgy, hogy B az AC szakasz pontja, és $CBO\sphericalangle \leq OBA\sphericalangle$. Megmutatjuk, hogy így az O_1O_2 szakasz O-ból és O_3-ból vett látószögeinek összege $180°$, és hogy az O_1O_2 egyenes szétválasztja O-t és O_3-at; ebből már következik, hogy $O_1O_3O_2O$ konvex húrnégyszög.

Az O_1O_3 egyenes mindig felező merőlegese az AO szakasznak, mert AO az 1. és 3. kör közös húrja, hasonlóan O_2O_3 merőlegesen felezi CO-t. $CBO\sphericalangle = OBA\sphericalangle$ $(= 90°)$ esetén O_1 felezi AO-t, O_2 a CO-t, és O_3 az AOC szögtartományban van, mert az $ACO\Delta$-ben AO-val és CO-val szemben hegyesszög van, így az $OO_1O_3O_2$ négyszögben O_1-nél és O_2-nél derékszög van, tehát az állításban szereplő kör az OO_3 szakasz fölé írt Thalész-kör; az $O_1O_3O_2$ és O_1OO_2 szögek merőleges szárú, egymást $180°$-ra kiegészítő szögek (1. a ábrarész).



1. ábra

Ugyanez az összefüggés a $CBO\sphericalangle < OBA\sphericalangle$ esetben is fennáll az $O_1O_3O_2$ és $DOF = AOC$ szögek között (1. b ábrarész). Így ugyanis O_2 és O_3 az OC egyenesnek A-t és B-t tartalmazó pontján van, mert OBC, ill. OAC hegyesszög, éspedig O_3 távolabb van OC-től, mint O_2, mert $OAC\sphericalangle = OBC\sphericalangle - BOA\sphericalangle < OBC\sphericalangle$, tehát az O_3O_2 félegyenes most is OC-nek F felezőpontja felé halad. Másrészt O_1 az OA-nak B-t nem tartalmazó partján van, és az O_3O_1 félegyenes OA-nak D felezőpontja felé irányul vagy része a DO_1 félegyenesnek aszerint, hogy az $OCB\sphericalangle \leq 90°$, ill. $OCB\sphericalangle > 90°$, mert C kívül van az $AOB\Delta$ köré írt körön, és ezért $O_1C > O_3C$. Ezek szerint O és O_1 az O_2O_3 egyenes ugyanazon oldalán vannak, és O az $O_1O_3O_2$ szögtartomány pontja, amint állítottuk. Így már elég lesz azt belátnunk, hogy az $O_1O_3O_2$ szöget $180°$-ra kiegészítő AOC szög egyenlő az O_1OO_2 szöggel.

Ez abból adódik, hogy OO_1 ugyanannyival van elfordulva OA-tól, mint OO_2 az OC-től, és a két forgás iránya mindkét esetben az, ami az OC félegyenest OB-n át OA-ba viszi. Ez O_2-nek és O_1-nek már kimondott helyzetéből adódik. Valóban,

$$AOO_1\sphericalangle = \frac{180° - AO_1O\sphericalangle}{2} = \frac{360° - AO_1O\sphericalangle}{2} - 90° = ABO\sphericalangle - 90° =$$
$$= 90° - OBC\sphericalangle = \frac{180° - OO_2C\sphericalangle}{2} = COO_2\sphericalangle.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Apor Zsuzsa (Esztergom, Bottyán J. gépip. t. II. o. t.)