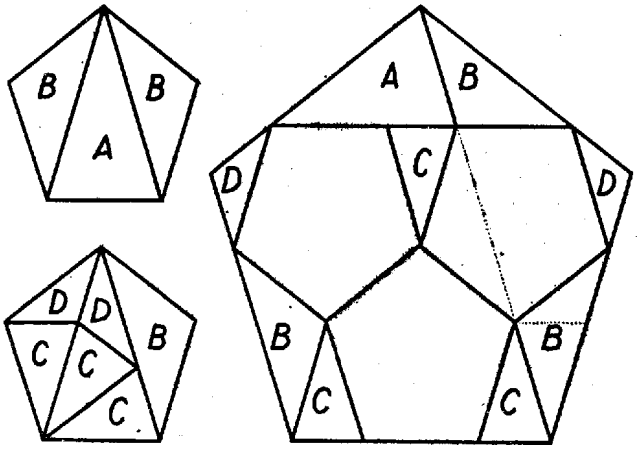
Figyeljük meg, hogy a nagy szabályos ötszög minden belső osztóvonala párhuzamos az ötszög egy oldalával. Ebből következik – figyelembe véve, hogy a szabályos ötszög mindegyik szöge 108° –, hogy az A és C jelű háromszögek szögei 72°, 72°, 36°, a B és D jelűeké 36°, 36°, 108°, vagyis mindegyik háromszög egyenlő szárú, és a 3 kis ötszögben minden szög 108°. Továbbá, hogy a fölső és a jobb alsó B háromszög egyik-egyik szára az ötszög egyik átlójára esik (az ábra pontozott vonala, ez nem osztóvonal!), ez az átló a jobb felső kis ötszögből egy a D-höz hasonló háromszöget vág le, a maradó négyszög szimmetrikus trapéz, és ezért a mondott B háromszögek egybevágók.



Azt is látjuk, hogy – a fölső A, B, háromszög-párt figyelmen kívül hagyva – az osztóvonalak hálózata szimmetrikus az eredeti ötszög függőleges tengelyére, továbbá, hogy a két fölső kis ötszögnek is van függőleges szimmetriatengelye. Ezekből és a háromszögek egyenlő szárú voltából lépésről lépésre következik, hogy a 3 kis ötszög összes oldalai egyenlők, így ezek is szabályos ötszögek, az ugyanolyan jelű háromszögek egybevágók, továbbá az A és D jelű háromszögek alapja, valamint a B és C jelű háromszögek szára egyenlő a kis ötszögek oldalával, végül (az A, B háromszögpárból az), hogy A szára egyenlő B alapjával.

Ezekből adódik, hogy a különálló kis ötszögek közül a B-, A-, B- háromszögekből összeállítottban minden szög egyenlő, és minden oldal is egyenlő, tehát ez is szabályos ötszög.

Már csak azt kell belátnunk a különálló alsó ötszög céljára, hogy egy C és egy D háromszöggel hiánytalanul és átfedés nélkül lefedhető a B háromszög, az A háromszög pedig két C-vel és egy D-vel, más szóval, hogy a C- és D háromszög szárainak összege is és alapjaik összege is egyenlő a B háromszög alapjával. Az első egyenlőség abból adódik, hogy a főábra jobb alsó B háromszöge 108°-os szögének csúcsán áthúzott vízszintes egyenes (az ábrán pontozva) a háromszöget nyilvánvalóan egy C és egy D háromszögre vágja szét; a második pedig abból, hogy a főábrán A vízszintes helyzetű szára egyenlő C alapjának és a kis ötszög oldalának – vagyis D alapjának – összegével.

Ezzel a szemléletre támaszkodó sejtést a kimondott megfigyelések felhasználásával bebizonyítottuk.

Losonci Zoltán (Szeged, Vedres I. ép. ip. t. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kis és a nagy ötszög hasonló, területük aránya a fentiek szerint $1:5$, így oldalaik aránya $1:\sqrt{5}$. Valóban, a nagy ötszög oldalát véve egységnek a fölső csúcsból jobbra lefutó átló hossza a feladat közlése szerint $(\sqrt{5}+1)/2$, másrészt ez az átló egyenlő a kis ötszög x oldala 2-szeresének és átlójának összegével:

$$x\left(1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1\right)=x\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

amiből $x=1/\sqrt{5}$.

2. Adott szabályos ötszögbe a feldaraboló hálózat az alábbiak szerint szerkeszthető bele, pusztán a szokásos háromszög vonalzópár használatával. Az ötszög bármelyik 2 szimmetriatengelyének metszéspontja megadja a 3 kis ötszög közös csúcsát (ugyanis a két D háromszög tengelyére mind a hozzájuk csatlakozó kis ötszög, mind a nagy ötszög tükrös), a tengelyek a derékszög vonalzó 90°-os átbillentésével rajzolhatók. A közös csúcsból kiinduló 4 félegyenest párhuzamos csúsztatással rajzoljuk meg, a rajtuk levő további csúcsot a nagy ötszögnek a felső csúcsból induló átlói metszik ki; ezután már csak párhuzamosok rajzolása van hátra.

A közös csúcsból húzott 4 félegyenes visszafelé való meghosszabbításai a nagy ötszög kerületéből 4 további csúcspontot közvetlenül is kimetszenek. A kerületen lévő további két csúcspont a középponton átmenő vízszintessel is kimetszhető.