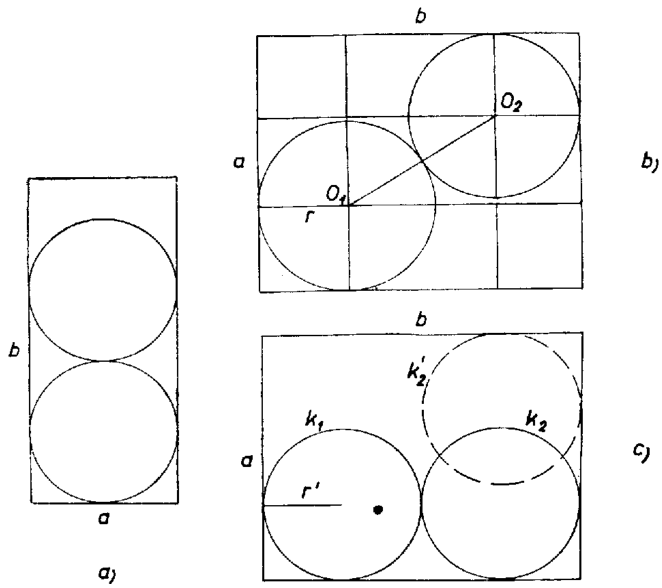
I. Legyenek az eredeti T-lemez oldalai a és b, ahol $a \leq b$. Ekkor a belőle egy darabban kivágható legnagyobb körlemez átmérője nyilvánvalóan a. Ilyenből 2 db is kivágható, ha $b \geq 2a$ (1. a ábra), különben azonban nem.

Az $a \leq b < 2a$ esetben az 1. b ábra szerinti elhelyezésben kapjuk a legnagyobb körlemez-párt. Ugyanis az 1. c ábra szerinti elrendezésben (ahol $2r' = b/2 < a$) k_2 áttolható a k_2' helyzetbe, ekkor k_2' nem érinti k_1-et, így a sugarak még növelhetők.



1. ábra

Az 1. b ábrán a két középpont $2r$ távolsága annak a téglalapnak az átlója, melynek oldalai T oldalaitól r távolságban haladnak, T-n belül. Ennek oldalai $a - 2r$ (> 0) és $b - 2r$, ennélfogva

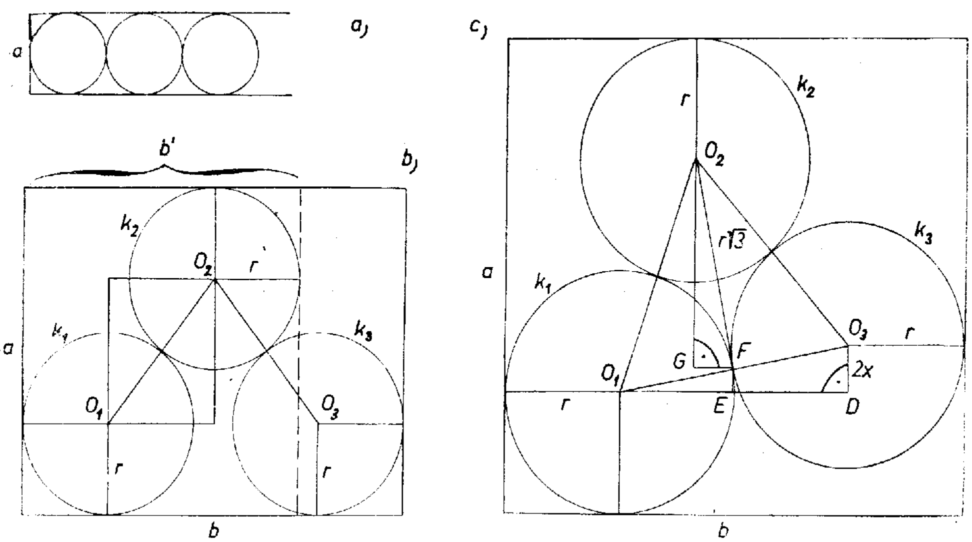
$$(a-2r)^2 + (b-2r)^2 = (2r)^2,$$

(1) $$4r^2 - 4(a+b)r + (a^2+b^2) = 0,$$

és így a legnagyobb körlemez-pár átmérője

$$2r = a + b - \sqrt{2ab}.$$

A négyzetgyököt + jellel véve $2r > a$, ami nem felel meg, egyébként a gyökök nyilvánvalóan valósak.



2. ábra

II. Hasonlóan adódik, hogy $b \geq 3a$ esetén lehet T-ből kivágni 3 db a átmérőjű körlemezt, valamint hogy $b < 3a$ esetén a 2. b ábra szerinti elrendezésben nagyobb átmérőjű körlemezek várhatók, mint $b/3 < a$. Mondhatjuk, hogy a 2. b ábrán két egyenlő sugarú kör van kivágva a $b' = r + b/2$ alapú, a magasságú téglalapból, így az r-et megadó egyenlet (1)-ből adódik, b helyére b'-t írva:

$$r^2 - (4a+b)r + (a^2 + b^2/4) = 0,$$

(2) $$r = 2a + b/2 - \sqrt{3a^2 + 2ab}.$$

A négyzetgyökjel előtt $+$ jelet véve a másik gyök $r > 2a$, pozitív, ezért a felírt r is pozitív, hiszen szorzatuk, az egyenlet r-et nem tartalmazó tagja, pozitív. Egyébként a gyökök nyilvánvalóan valósak.

Állandó a és egyre rövidülő b esetén az alapon levő két kör mindaddig nem nyúlik egymásba, amíg $b - 4r \geq 0$. Ennek feltétele (2) alapján

$$\begin{gathered} 4\sqrt{3a^2+2ab} \geq 8a+b, \\ 48a^2+32ab \geq 64a^2+16ab+b^2, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 16\left(\frac{b}{a}\right)+16 \leq 0, \\ 8-4\sqrt{3} \leq \frac{b}{a} \leq 8+4\sqrt{3}, \end{gathered}$$

ill. a korábbi $b/a < 3$ korlátozást is figyelembe véve

$$(1{,}072 \approx) \quad 8-4\sqrt{3} \leq b/a < 3.$$

A hátra levő $1 \leq b/a < 8-4\sqrt{3} (\approx 1{,}072)$ esetben mindhárom kör páronként érinti egymást, viszont a k_3 kör már csak az a hosszúságú oldalt érinti. A 2. c ábra jelöléseivel

$$r+EF+GO_2+r=a, \qquad r+O_1D+r=b,$$

és felhasználva az O_2FG, O_1O_3D és O_1FE háromszögek hasonlóságát, az átfogók $O_2F : O_1O_3 : O_1F = \sqrt{3} : 2 : 1$ arányát:

$$2r+x+\sqrt{3}\cdot\sqrt{r^2-x^2}=a, \tag{3}$$

$$2r+2\sqrt{r^2-x^2}=b. \tag{4}$$

A négyzetgyököt (4)-ből kifejezve és (3)-ba helyettesítve

$$x = a-2r-\sqrt{3}\left(\frac{b}{2}-r\right) = a-\frac{\sqrt{3}}{2}b-(2-\sqrt{3})r,$$

majd ezt a (4)-ből rendezéssel és négyzetre emeléssel adódó egyenletbe beírva újabb rendezés után

$$\begin{gathered} r^2-x^2 = r^2-\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2+(2a-\sqrt{3}b)(2-\sqrt{3})r-(2-\sqrt{3})^2r^2 = \\ = \left(\frac{b}{2}-r\right)^2 = \frac{b^2}{4}-br+r^2, \\ (2-\sqrt{3})^2r^2-2(2-\sqrt{3})(a+b)r+(a^2-\sqrt{3}ab+b^2)=0. \end{gathered}$$

A diszkrimináns, végül a körök sugara

$$\begin{gathered} 4(2-\sqrt{3})^2(a+b)^2-4(2-\sqrt{3})^2(a^2-\sqrt{3}ab+b^2) = 4(2-\sqrt{3})^3ab, \\ r=(2+\sqrt{3})\left(a+b-\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)ab}\right). \end{gathered}$$

Speciálisan, $a=b$ esetén, figyelembe véve, hogy

$$\begin{gathered} 2+\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2/2, \\ 2r = (2+\sqrt{3})(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})a \approx 0{,}509a. \end{gathered}$$