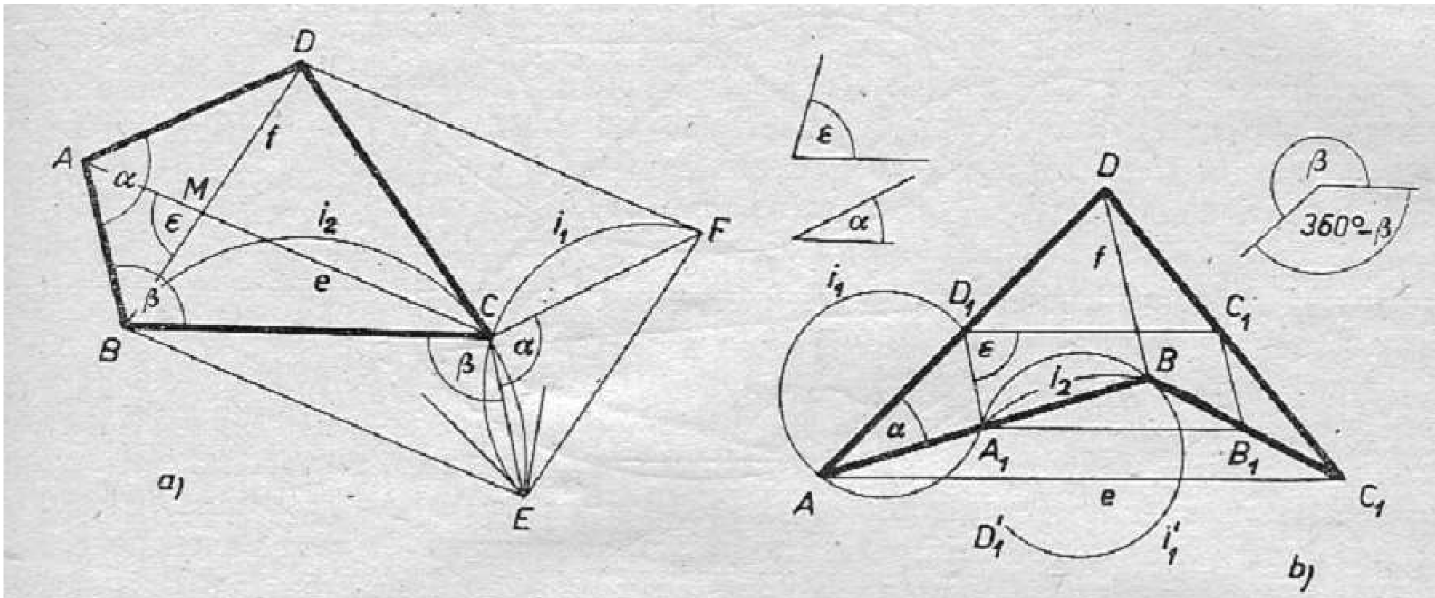
I. megoldás. Legyen $ABCD = N$ a feltételeket kielégítő négyszög (1. ábra a része), éspedig a BAD és CBA szög egyenlő a csúcsokhoz előírt α, ill. β szöggel az AC és BD átló egyenlő az előírt e, ill f szakasszal, végül az átlók M metszéspontjánál levő AMB szög az adott ε szöggel.



1. ábra

Toljuk el az ABC háromszöget úgy, hogy A a C-be jusson, és legyen BD új helyzete EF. Ekkor a $BEFD = P$ és a $BECA$ idom paralelogramma, P oldalai $BE = AC = e$ és $BD = f$, DBE szöge ε, az utóbbiban a BC szakasz átló. Így $ECB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$, váltószögek, továbbá $ECF\sphericalangle = BAD\sphericalangle = \alpha$, egyállású szögek.

Ezek alapján az e, f, ε adatokból megszerkesztjük az FED háromszöget és kiegészítjük P-vé, megszerkeszthetjük EF fölé α nyílásszöggel az i_1, BE fölé β szöggel az i_2 látószögkörívet, ezeknek (E-től különböző) közös pontja a C csúcs; végül a CEF háromszöget úgy toljuk el, hogy E a B-be jusson, ekkor C új helyzete az A csúcs.

Az $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert az eltolás miatt a felmért adatok az előírt helyzetbe jutottak.

i_1-et, i_2-t P oldalai fölé azon a parton szerkesztjük meg, amelyiken D van, hacsak $\alpha < 180°$, ill. $\beta < 180°$. Ellenben pl. $\alpha > 180°$ esetén i_1-et EF másik partján szerkesztjük a kiegészítő $360° - \alpha (< 180°)$ látószöggel.

A közös pontból kiinduló i_1-nek és i_2-nek legfeljebb még egy közös pontja van, így a megoldás – ha létezik – egyértelmű. Az ívekhez E-ben húzott félérintő EF-fel, ill. EB-vel $180° - \alpha$, ill. $180° - \beta$ szöget zár be. C létrejön, ha ez a két szög átfedi egymást a BEF szögtartományban, azaz ha

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) > 180° - \varepsilon, \qquad \varepsilon > \alpha + \beta - 180°.$$

N-nek konvex, konkáv vagy hurkolt voltát C-nek P-hez képest adódó helyzete határozza meg. Hurkolt megoldás nem fogadható el, mert hurkolt négyszög kerületén nem jelölhető ki a belső és a külső part, szögei nem értelmezhetők a szokott módon.

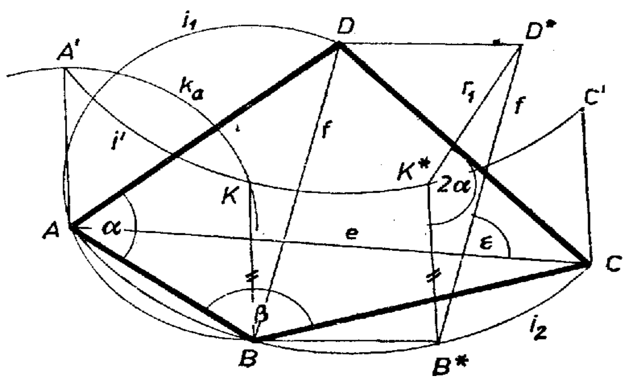
Halek Tibor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.) dolgozata kiegészítéssel

Megjegyzések. 1. A négyszög egymás utáni oldalainak felezőpontjai egy paralelogramma egymás utáni csúcsait adják, melynek oldalai az átlók felével, szögei az átlók közti szögekkel egyenlők. Adatainkból ez az $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma[1] megszerkeszthető (legyen A_1 az AB oldal felezőpontja, s i.t., ekkor $B_1A_1D_1\sphericalangle = AMB\sphericalangle = \varepsilon$, az ábra b része). Így az A csúcs az A_1D_1 szakasz α nyílású i_1 látószögkörívén van, B pedig az A_1B_1 szakasz $360° - \beta$ szögű i_2 látókörívén. Mivel még B az A tükörképe A_1-re, azért rajta van i_1-nek A_1-re való i_1' tükörképén is, ezért B-t megadja i_2-nek és i_1'-nek A_1-től különböző metszéspontja. Ezután B-nek A_1-re való tükörképe A, B_1-re való képe C, és D az A tükörképe D_1-re. – Ez a megoldás lényegében a fenti megoldás felére kicsinyített változata.

Orbán Gábor (Makó, József A. Gimn.)

2. Ha β helyett a $BCD = \gamma$ szög lenne adva, akkor a B_1C_1 szakasz fölötti γ nyílású i_3 körívet az i_1'-nek B_1-re való i_1'' tükörképével metszve a C csúcsot kapnók meg elsőnek. Könnyű belátni, hogy i_1'' az i_1-ből e nagyságú eltolással is létrejön, az A_1B_1 irányban.

[1] Az ábra *b)* részén a jobb alsó C_1 helyesen C.



2. ábra

II. megoldás. A B csúcs az AC szakasz β látószögű i_2 körívén van (előre kiköthetjük, hogy az AC egyenes melyik oldalán), A a BD szakasz α látószögű i_1 körívén. Rögzítsük az AC szakasz helyzetét (2. ábra), ekkor i_1-et kell alkalmasan elhelyeznünk. Ehhez K középpontját szerkesztjük meg abból kiindulva, hogy $BD = f$ és α meghatározzák az ív r_1 sugarát és a BDK háromszöget, így a KBD szöget is. Ezért K-nak rajta kell lennie egyrészt az A körül r_1 sugárral rajzolt k_a körön; másrészt míg B végigfut i_2-n, minden helyzetében ismert a BD szakasz iránya és ezzel a BK szakasz iránya és r_1 hossza is, egy ilyen az ábrán B^*D^* és hozzá K^*. K tehát azon az i_2-vel egybevágó $A'C' = i'$ köríven fut végig, amely i_2-ből a B^*K^* irányú és nagyságú eltolással keletkezik. Ennélfogva K a k_a körnek és az i' ívnek (A'-től különböző) metszéspontja. Ezután B-t a K-n átmenő, a K^*B^*-gal párhuzamos egyenes metszi ki i_2-ből. A szerkesztés diszkusszióját az olvasóra hagyjuk.

Tolnay-Knefély Tibor (Budapest, Bláthy O. Techn.)