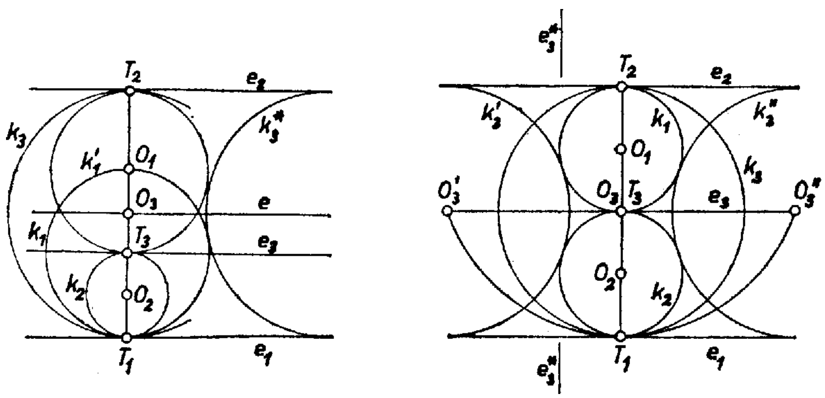
A feladat nem kívánta minden megfelelő körhármas megszerkesztését, itt mégis vázoljuk az összes megoldásokat, de – hely hiányában – a kölcsönös helyzet lehetőségeire vonatkozó megállapításaink teljes átgondolását egy-két példa mintájára az olvasóra kell bíznunk. A k_i kör középpontját O_i-vel, sugarát r_i-vel jelöljük, $i = 1, 2, 3$.

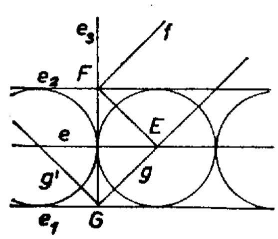
a) rész. Feküdjék e_3 az e_1 és e_2 között. k_1 és k_2 csak az e_3-on tetszés szerint felvett T_3 érintési pontjukban érinthetik egymást, és T_3-nak e_1-en és e_2-n levő vetületét T_1-gyel, ill. T_2-vel jelölve k_1 csak a T_3T_2, k_2 pedig csak a T_3T_1 átmérő fölötti kör lehet. Ekkor a T_1T_2 átmérő fölötti kör megfelel k_3-ként (l. *a* ábra). Ha e_3 közelebb van pl. e_1-hez, mint e_2-höz, akkor más megoldás nincs, hiszen amennyiben egy az e_1-et és e_2-t érintő k_3^* kör kívülről érinti k_1-et, akkor érinti k_1-nek a T_1T_2 szakasz e felező merőlegesére vett k_1' tükörképét is, k_1' viszont a belsejében tartalmazza k_2-t, és érintkezési pontjuk nincs rajta a k_3^*-on, tehát k_2 nem érintheti k_3^*-ot.



1. a. *és* *1.b. ábra*

Ha viszont e_3 azonos e-vel, akkor k_3-ra nyilvánvalóan további két lehetőség van, O_3'-t és O_3''-t az O_1 körüli, O_1T_1 sugarú kör metszi ki e_3-ból (l. *b* ábra).

b) rész. A szerkesztéseket r_1 és r_2 kiszámításával készítjük elő, r_3-at véve egységnek. O_3 a fenti e egyenesen lesz. e_3 és e az adatok ábrájának szimmetria-tengelyei, minden megfelelő körhármasnak ezekre való tükörképe is megfelelő, megjegyezve, hogy az e-re való tükrözés felcseréli e_1 és e_2, valamint k_2 és k_1 szerepét. Elég tehát azokat a megoldásokat megkeresnünk, amelyekben O_1 a 2. ábra jobb fölső e, e_3 derékszögtartományában van, vagyis az f szögfelező félegyenesen vagy az FE szakaszon. Nem lehet O_1 az F-ben, továbbá E-ben sem, különben nem lehetne k_1, k_2 és k_3 három különböző kör. Így k_1-nek nem lesz pontja e_1-en, sem alatta, ezért k_2 csak e_1 fölött, vagyis O_2 csak a g és g' félegyenesen lehet. – Az O_1 és O_2 helyzetére megállapított 2–2 lehetőséget kombinálva 4 esetet kapunk.



2. ábra

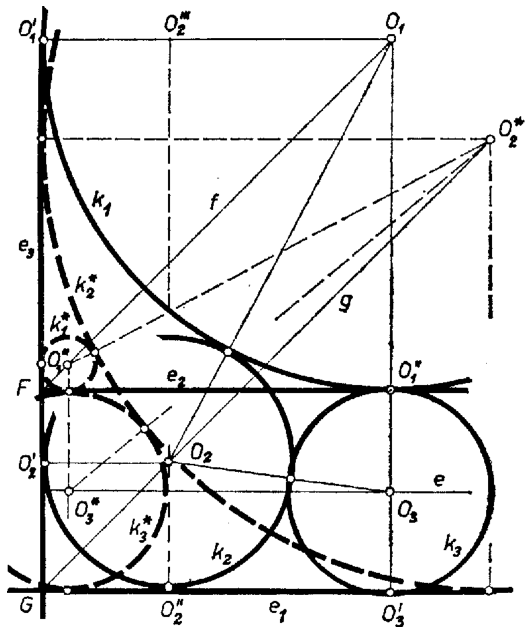
I. eset. Legyen O_1 az f-en, O_2 a g-n. Ekkor k_1 és k_3 csak kívülről érinthetik egymást O_1-nek e_2-n levő O_1'' vetületében, ezért $e_2 \perp O_1O_3 \parallel e_3$ (3. ábra). k_1 a k_2-vel is csak külső érintkezésben állhat, $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Belső érintkezés esetében ugyanis O_1-nek e_3-on levő O_1' vetületében érintkeznének, O_1O_2 merőleges lenne e_3-ra, k_1 a k_2 belsejében lenne, hiszen $r_2 = r_1 + 2$ állana fenn; ezért k_3 is benne lenne k_2-ben – különben nem érinthetné k_1-et –, ennélfogva csak az e_1-en érintkezhetnének, O_2O_3 merőleges lenne e_1-re, azaz párhuzamos lenne e_3-mal, ez viszont nem állhatna fenn $O_1O_3 \parallel e_3$ miatt. – Hasonlóan k_2 és k_3 is csak kívülről érintkezhetnek, $O_2O_3 = r_2 + 1$.

Érintse k_2 az e_3-at O_2'-ben, e_1-et O_2''-ben, k_3 az e_1-et O_3'-ben, és legyen O_2 vetülete az O_1O_1' egyenesen O_2'''. Ekkor $O_1O_2''' = |r_1 - r_2|$, és az $O_1O_2O_2'''$ derékszögű háromszögből az érintési pontok távolságára:

(1) $$O_1'O_2'^2 = O_2'''O_2^2 = O_2O_1^2 - O_2'''O_1^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2.$$

Mivel itt még $O_1'O_2' = |GO_1' - GO_2'| = |O_3'O_1 - O_2''O_2| = |r_1 + 2 - r_2|$, azért

(2) $$(r_1 + 2 - r_2)^2 = 4r_1r_2.$$



3. ábra

Másrészt (1)-ben r_1 helyére $r_3 = 1$-et írva a k_2, k_3 kör-pár e_1-en levő érintési pontjainak távolságára kapunk egyenletet:

(3) $$O_3'O_2''^2 = 4r_2, \quad \text{és} \quad O_3'O_2'' = O_1O_2''' \quad \text{miatt} \quad (r_1 - r_2)^2 = 4r_2.$$

Vonjuk ki (3) 2-szereséből (2)-t; az egyenlet így alakítható:

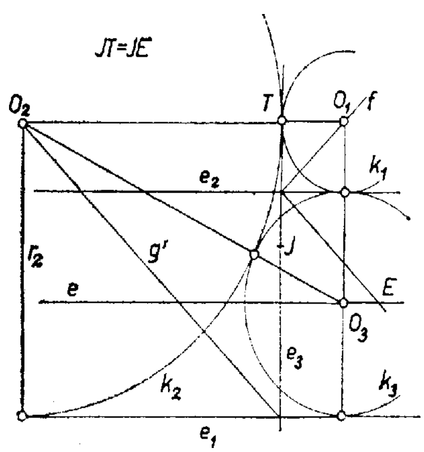
$$(r_1 + r_2)^2 - 4(r_1 + r_2) - 4 = 0, \quad \text{és innen} \quad r_1 + r_2 = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

A negatív érték azonban feladatunkban nem használható; így $r_2 = 2 + 2\sqrt{2} - r_1$ alapján (3)-ból

$$r_1^2 - \left(1 + 2\sqrt{2}\right) r_1 + 1 = 0, \quad \text{amiből}$$

(4) $$r_1 = \left(1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}\right)/2, \quad r_2 = \left(3 + 2\sqrt{2} \mp \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}\right)/2.$$

Mindkét megoldásban r_1 és r_2 pozitív, megfelelők. (A kisebb r_1 esetében adódó körhármas az ábrán k_1^*, k_2^*, k_3^*.)



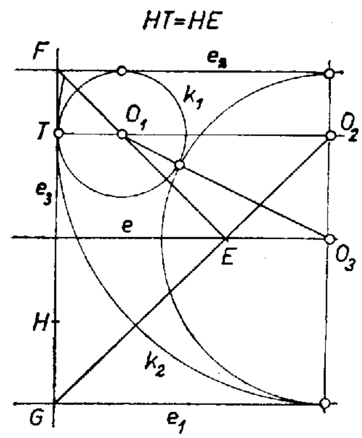
4. ábra

II. eset. Legyen O_1 az f-en, O_2 a g'-n. Ekkor k_1 és k_2 két oldalról érintik e_3-at, $r_2 = r_1 + 2$, k_2 és k_3 is kívülről érintkeznek (4. ábra). Az $O_1O_2O_3$ derékszögű háromszögből, majd r_2-t kiküszöbölve

$$(r_1 + 3)^2 = (2r_1 + 2)^2 + (r_1 + 1)^2 = 5(r_1 + 1)^2,$$
$$r_1 + 3 = \pm\sqrt{5}(r_1 + 1), \quad r_1 = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2, \quad r_2 = \left(\sqrt{5} + 3\right)/2.$$

III. eset. Legyen O_1 az FE szakaszon, O_2 a g-n. Tekintsük először az olyan körhármasokat, amelyekben *van belső érintkezés.* Két ilyen helyzetű kör közül a belsőt is harmadik körünk csak úgy érintheti, ha maga is benne van a külső körben, de nincs benne a belsőben. Előírásunk szerint $r_1 < 1 = r_3$, ezért k_1 csak belső kör lehet.

Ha még $r_2 < 1$, akkor k_2 is a k_3-ban van. Ekkor $r_1 = r_2$, mert k_1-nek e_2-n és k_2-nek e_1-en levő érintési pontját összekötő egyenes merőleges e_1-re, tehát párhuzamos e_3-mal, hiszen ezek egyben k_3 érintési pontjai. Továbbá k_1 és k_2 külső érintkezése miatt $2r_1 + 2r_2 = 2$, és így $r_1 = r_2 = 1/2$. (Lásd az 1. ábra *b*) részén a k_1, k_2, k_3 körhármast, ha az ottani e_3 helyett a vázolt e_3^* egyenest vesszük. Így k_3 helyett az ábra k_3' és k_3'' köre is megfelelő hármast ad k_1-gyel és k_2-vel összekapcsolva. Mutassa meg az olvasó, hogy nincs más olyan megoldás, melyben $r_1 = r_2$.)



5. ábra

Ha pedig $r_2 > 1$, akkor k_2 zárja magába k_1-et és k_3-at (5. ábra). Ekkor $r_2 = 2 - r_1$, $O_1O_2 = r_2 - r_1 = 2 - 2r_1$, $O_2O_3 = r_2 - 1 = 1 - r_1$, $O_1O_3 = r_1 + 1$, így az $O_1O_3O_2$ derékszögű háromszögből

$$(2-2r_1)^2 + (1-r_1)^2 = 5(1-r_1)^2 = (r_1+1)^2, \quad \sqrt{5}(1-r_1) = \pm(r_1+1),$$

$$r_1 = \left(3-\sqrt{5}\right)/2, \qquad r_2 = \left(\sqrt{5}+1\right)/2. \tag{6}$$

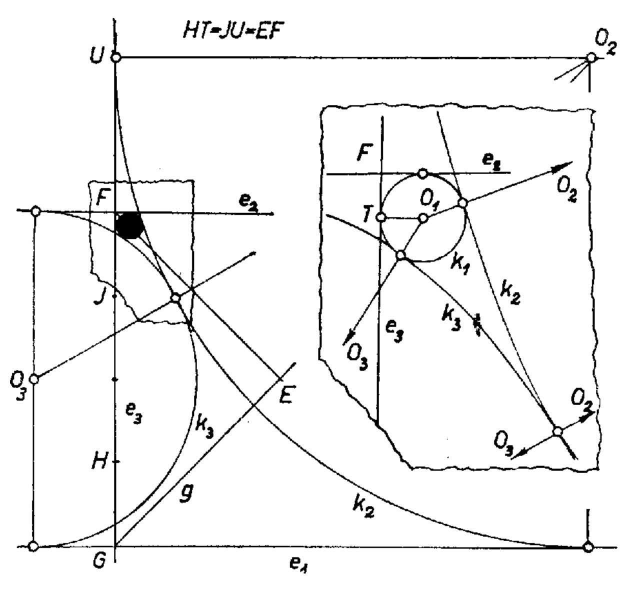
Mindhárom kör-pár külső érintkezése esetére már csak azokat a megoldásokat keressük, amelyekben $r_1 \neq r_2$. Ekkor nincs olyan megoldás, amelyben O_2 közelebb van e_1-hez, mint O_1, vagyis $r_2 < 2 - r_1$. Ilyenkor ugyanis (1)-ből négyzetgyökvonással

$$O_1'O_2' = 2 - r_1 - r_2 = 2\sqrt{r_1r_2}, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \sqrt{2}. \tag{7}$$

O_3 nem lehet e_3-tól jobbra; legyen ezért O_3 az e_3 bal oldalán, tőle p távolságban. (1)-et a k_1, k_3 és a k_2, k_3 párra alkalmazva és négyzetgyököt vonva, majd kivonással, osztással

$$2\sqrt{r_1} = p + r_1,$$
$$2\sqrt{r_2} = p + r_2,$$
$$2\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}\right) = r_2 - r_1 = \left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}\right)\left(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}\right),$$
$$2 = \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}, \tag{8}$$

ellentétben (7)-tel. – Ha viszont O_2 távolabb van e_1-től, mint O_1, vagy ha távolságuk egyenlő, (7) így alakul (6. ábra):

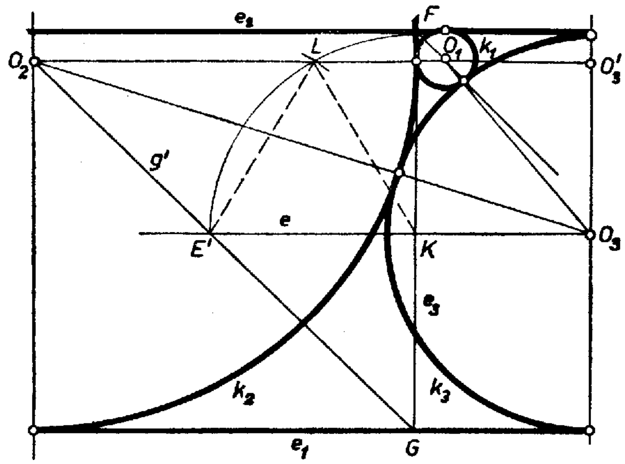


6. ábra

$$r_2 - (2 - r_1) = 2\sqrt{r_1 r_2},$$
$$\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1} = \sqrt{2},$$

amit (8)-cal összekapcsolva

$$r_1 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)/2, \qquad r_2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)/2. \tag{9}$$



7. ábra

IV. eset. Végül O_1-et FE-n, O_2-t g'-n keresve (7. ábra) $FE \parallel g'$ miatt $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 2$, csak külső érintkezés lehet, így $O_1O_3 = r_1 + 1$, $O_2O_3 = r_2 + 1 = 3 - r_1$. Legyen O_3 vetülete az O_1O_2 egyenesen O_3', ekkor $O_3'O_3 = 1 - r_1$. Az $O_3O_3'O_1$ és $O_3O_3'O_2$ derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján

$$O_3'O_1^2 = 4r_1, \qquad O_3'O_2^2 = 4(2 - r_1) > 4 = O_1O_2^2,$$

tehát O_1 az O_2O_3' szakaszon van. Ezért

$$O_2O_3' = O_2O_1 + O_1O_3' \qquad \sqrt{2 - r_1} = 1 + \sqrt{r_1},$$
$$2r_1 + 2\sqrt{r_1} - 1 = 0, \quad \text{a pozitív gyök} \quad \sqrt{r_1} = \left(\sqrt{3} - 1\right)/2,$$
$$r_1 = 1 - \sqrt{3}/2, \qquad r_2 = 1 + \sqrt{3}/2. \tag{10}$$

Áttérve a szerkesztésre, k_1 és k_2 érintési pontjai a (4), (5), (6), (9) és (10) kifejezések alapján jelölhetők ki, O_3 pedig O_1 vagy O_2 helyzete alapján. A 4–7. ábrákon a jegyzet utal erre, H, J, K az FG szakasz negyedelő pontjai, így $HE = JE = \sqrt{5}/2$. A (4) kifejezések harmadik tagja annak a derékszögű háromszögnek a második befogója, amelyben az átfogó $1 + 2\sqrt{2}$, és az első befogó 2.

A szimmetrikus megoldásokat is számba véve a követelményeknek 30 körhármas tesz eleget.

(*Összeállítva* több dolgozatból, számos *kiegészítéssel.*)