I. megoldás. Az állításnak 1-nél nagyobb egész n-ekre van értelme. Jelöljük az $x_1, \ldots, x_k$ számok összegét S_k-val, szorzatukat P_k-val, ekkor a következő egyenlőtlenséget kell bizonyítani:

$$S_n - P_n < n-1, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x_i < 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=2$ esetén

$$S_2 - P_2 = x_1 + x_2 - x_1x_2 = x_1 + x_2(1-x_1) < x_1 + (1-x_1) = 1,$$

mert $x_2 < 1$, és $1-x_1$ pozitív, miután $x_1 < 1$.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n = k (\geqq 2)$ értékre igaz az állítás és vizsgáljuk $k+1$ számú, 1-nél kisebb pozitív x_i számra (1) bal oldalát:

$$S_{k+1} - P_{k+1} = S_k + x_{k+1} - P_k x_{k+1} = S_k + x_{k+1}(1-P_k) < S_k + \\ + (1-P_k) = S_k - P_k + 1,$$

mivel $x_{k+1} < 1$ és $1 - P_k > 0$, mert a feltételek szerint $P_k < 1$. Feltevésünket az 1-nél kisebb pozitív $x_1, \ldots, x_k$ számokra alkalmazva, az első különbség kisebb $k-1$-nél, s így

$$S_{k+1} - P_{k+1} < k = (k+1) - 1,$$

tehát az állítás helyessége öröklődik k-ről $k+1$-re. Mivel $n=2$-re már beláttuk, hogy helyes, így minden n-re igaz.

Fialovszky Béla (Esztergom, Temesvári Pelbárt Ferences g. II. o. t.)

II. megoldás. A bizonyítandó állítást a következő alakban írhatjuk:

$$x_1x_2 \ldots x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (n-1), \text{ ha } 0 < 1 (i=1, \ldots, n).$$

Ismét teljes indukcióval bizonyítunk. $n=2$-re a bal oldalból levonva a jobbat

$$x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 = (1-x_1)(1-x_2) > 0,$$

mert $x_1 < 1$, $x_2 < 1$. Az állítás tehát ez esetben helyes.

Tegyük fel, hogy az állítás helyes valamilyen $n = k (\geqq 2)$ esetre, és legyenek adva az 1-nél kisebb pozitív $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ számok. Feltevésünk szerint az első k számra

$$x_1x_2 \ldots x_k > x_1 + x_2 + \ldots + x_k - (k-1).$$

Szorozzuk ezt meg a pozitív x_{k+1}-gyel, majd alkalmazzuk a jobb oldalon fellépő $x_i x_{k+1}$ szorzatokra $(i=1, \ldots k)$ az $n=2$-re már bizonyított egyenlőtlenséget. (Tehetjük, mert $0 < x_i < (i=1, \ldots, k)$, és $0 < x_{k+1} < 1$):

$$x_1x_2 \ldots x_k \cdot x_{k+1} > x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \ldots + x_kx_{k+1} - (k-1)\,x_{k+1} >$$

$$> x_1 + x_{k+1} - 1 + x_2 + x_{k+1} - 1 + \ldots + x_k + x_{k+1} - 1 - (k-1)\,x_{k+1} =$$

$$= x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} - k.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Mindkét bizonyítás gondolatmenetével belátható, hogy az állítás az $0 \leqq x_1 \leqq 1 (i=1, \ldots, n)$ feltétel mellett is teljesül, kivéve, ha az x_i értékek közt szerepel legalább $n-1$ számú 1-es; utóbbi esetben (1)-ben is egyenlőség áll fenn.

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)