Fejezzük ki (1)-ből y-t, (3)-ból z-t, helyettesítsük a kifejezéseket (2)-be, és gyűjtsük az x-et tartalmazó tagokat az egyik, az x-et nem tartalmazó tagokat a másik oldalra:

$$y=(c-a)(a+b)+\frac{a-c}{b+c}x, \tag{1'}$$

$$z=(a+b)(c+a)+\frac{a+b}{c-b}x, \tag{3'}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{a-c}{(b+c)(c+a)}+\frac{a+b}{(c-b)(a-b)}\right)\cdot x=\\ =\frac{(a-c)(a+b)}{c+a}+\frac{(a+b)(c+a)}{b-a}+b+c.\end{gathered} \tag{4}$$

Közös nevezőre hozás és beszorzás után

$$\frac{2(abc+a^2c+c^2b+b^2a)}{(c^2-b^2)(c+a)(a-b)}\cdot x=\frac{2(abc+a^2c+c^2b+b^2a)}{(c+a)(b-a)},$$

így hányadosuk, majd (1′) és (3′) alapján a másik két ismeretlen

$$x=b^2-c^2,\qquad y=(c-a)(a+b+c-b)=c^2-a^2,\qquad z=a^2-b^2,$$

hacsak az egyszerűsítő tényező 0-tól különböző:

$$K=abc+a^2c+c^2b+b^2a\neq 0.$$

Természetesen azt is feltettük, hogy az előforduló nevezők is mind különbözők 0-tól – különben legalább egyik egyenletnek nem volna értelme, és így az egyenletrendszernek sem – vagyis

$$\begin{gathered}(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)=\\ =(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\neq 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Amennyiben $K=0$, akkor (4)-et x helyén bármely szám kielégíti, és így az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van:

$$\begin{gathered}x=t,\qquad y-(c-a)(a+b)+\frac{a-c}{b+c}\cdot t,\\ z=(a+b)(c+a)+\frac{a+b}{c-b}\cdot t,\end{gathered}$$

ahol t tetszés szerinti szám. Ilyen esetet kapunk pl. $K=0$-ból, ha a-t 1-nek, c-t -2-nek választjuk, b-t pedig az adódó $b^2+2b-2=0$ egyenlet egyik gyökének, $\sqrt{3}-1$-nek.

Minden ilyen esetben az egyenletrendszerben függés áll fenn, két egyenletet alkalmas számokkal való szorzás után összeadva a hátra levő egyenletet kapjuk, pl. a mondott számpélda esetében a rendszer:

$$\frac{x}{\sqrt{3}-3}-\frac{y}{3}=\sqrt{3},\qquad -y+\frac{z}{2-\sqrt{3}}=\sqrt{3}-3,\qquad \frac{x}{1+\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=-1,$$

és itt az első egyenlet 3-szorosát és a harmadik egyenlet $(2\sqrt{3}+3)$-szorosát összeadva a második egyenletet kapjuk.

Eff Lajos (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A legtöbb dolgozat nem gondolt a $K=0$ esetből adódó következményekre.

Néhányan tévesen azt állították, hogy $K=0$ lehetőségét kizárja (5) feltételezése.

$K=0$-ra vezető számpélda keresése nem volt része a feladatnak, de mindenesetre közelebb visz a kérdésben való tisztánlátáshoz. Azonban a $K\neq 0$ feltétel puszta kimondásához az I. osztályos tudás elegendő.