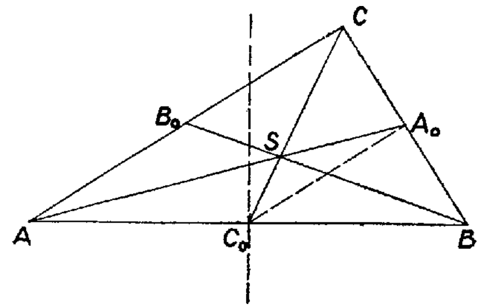
I. megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának és BC, CA befogóinak felezőpontja rendre C_0, A_0, B_0, az AA_0, BB_0 és CC_0 súlyvonalak közös pontja S, és legyen $AC > BC$. Így ezeket kell belátnunk:

$$BB_0 < AA_0, \tag{1}$$

$$BB_0 > AA_0/2. \tag{2}$$



Mivel

$$AS = \frac{2}{3}AA_0, \qquad BS = \frac{2}{3}BB_0, \qquad \text{és} \quad A_0S = \frac{1}{3}AA_0,$$

ezért egyenlőtlenségeink egyenértékűek a következőkkel:

$$BS < AS, \tag{3}$$

$$BS > A_0S. \tag{4}$$

Meghúzva az AB szakasz felező merőlegesét, ennek C ugyanazon a partján van, mint B, és így az egész CC_0 szakasz, tehát annak S pontja is ugyanazon a partján van. Ebből következik (3) helyessége.

Másrészt A_0C_0 merőleges BC-re és az AA_0B szögtartományban van, mert C_0 az AB szakaszon van. Így $AA_0B\sphericalangle > C_0A_0B_0\sphericalangle = 90^\circ$. Ebből következik, hogy BS az $A_0BS\triangle$ legnagyobb oldala, tehát fennáll (4) is.

Eördögh Gábor (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)
Kovács Tamás (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. I. o. t.)

II. megoldás. (1) és (2) két oldala pozitív, így elég belátni a négyzetre emeléssel adódó

$$BB_0^2 < AA_0^2, \tag{1a}$$

$$BB_0^2 > AA_0^2/4 \tag{2a}$$

egyenlőtlenségek fennállását. A Pythagoras-tételt alkalmazva az AA_0C és BB_0C derékszögű háromszögre, képezzük (1a) és (2a) oldalainak különbségét. A feltevés figyelembevételével

$$AA_0^2 - BB_0^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{4} - \left(BC^2 + \frac{AC^2}{4}\right) = \frac{3}{4}(AC^2 - BC^2) > 0,$$
$$BB_0^2 - \frac{AA_0^2}{4} = \left(BC^2 + \frac{AC^2}{4}\right) - \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{16}\right) = \frac{15}{16}BC^2 > 0,$$

tehát (1a) és (2a) mindegyike igaz.

Kulcsár Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. A második esetben egyik megoldásban sem használtuk fel a befogók nagyságviszonyát, a $BC \geq AC$ esetekben azonban (1) mellett (2) semmitmondó.