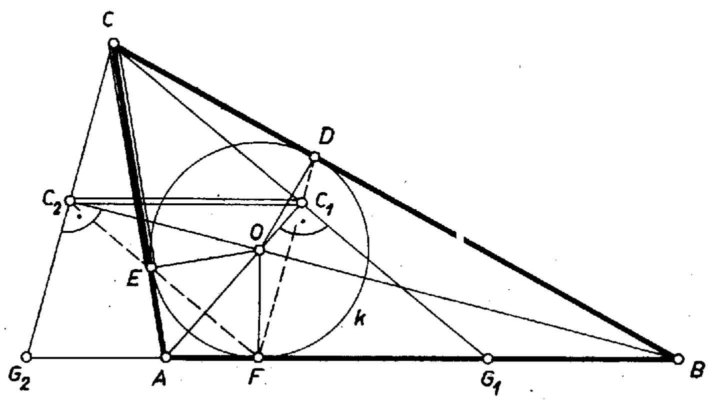
Messe az AB egyenest a CC_1 egyenes G_1-ben, CC_2 pedig G_2-ben, és legyen a beírt k kör érintési pontja a BC oldalon D, az AB-n F (1. ábra). Így C és G_1, továbbá E és F tükrös pontpár az AC_1 szögfelezőre, hasonlóan C és G_2, valamint D és F egymás tükörképei BC_2-re. Ezért egyrészt $CG_1 = 2 \cdot CC_1$, $CG_2 = 2 \cdot CC_2$, tehát C_1C_2, mint a CG_1G_2 háromszög középvonala, fele a G_1G_2 szakasznak. Másrészt

$$G_1G_2 = G_1F + FG_2 = CE + DC = 2 \cdot CE,$$

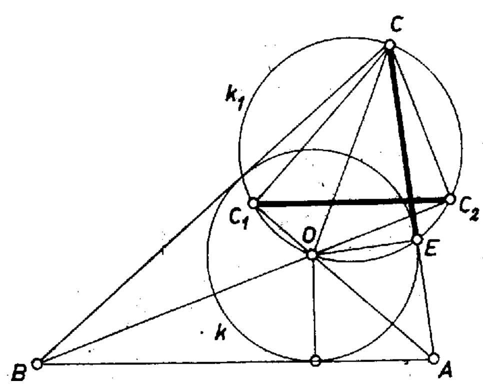
mert CD és CE a k-hoz húzott érintőszakaszok, így valóban $C_1C_2 = CE$.

A felhasznált G_1, G_2 metszéspontok mindig létrejönnek, mert pl. CC_1-nek AB-vel bezárt (egyik) szöge $(180° - \alpha)/2$, tehát CC_1 nem lehet párhuzamos AB-vel. – Továbbá F mindig a G_1G_2 szakaszon van, ugyanis az F-nek G_1 azon az oldalán van, mint a B csúcs, G_2 pedig azon, mint A. Valóban, FE elválasztja a vele párhuzamos G_1C egyenes C pontját A-tól – hiszen E az AC szakaszon van –, és hasonlóan A-t B-től. A G_2-re mondott állítás pedig a pontoknak az FD egyeneshez viszonyított helyzete alapján hasonlóan látható be.



1. ábra

Megjegyzés. A $CD = CE$ egyenlőségből azt is kaptuk, hogy F felezi a G_1G_2 oldalt, így a $CG_1G_2\triangle$-ben FC_2 és FC_1 is középvonalak. Ezért FC_1 párhuzamos G_2C-vel, így merőleges a BC_2 szögfelezőre, tehát átmegy F tükörképén, a D ponton, amit úgy is mondhatunk, hogy a k kör D, F érintési pontjait összekötő egyenes átmegy C-nek az A-ból kiinduló szögfelezőre való vetületén. Hasonlóan FE átmegy C_2-n.



2. ábra

II. megoldás. A szögfelezők átmennek k középpontján, O-n, így a CO szakasz C_1-ből és C_2-ből derékszögben látszik, tehát C_1 és C_2 a CO szakasz fölötti k_1 Thalész–kör pontjai (2. ábra). Másrészt az érintés miatt E is a k_1-en van, így az összehasonlítandó szakaszok a k_1 kör húrjai. Az állítást avval bizonyítjuk, hogy k_1-ben a két húrhoz egyenlő, ill. egymást 180°-ra kiegészítő kerületi szögek tartoznak.

$C_1OC_2\sphericalangle$ az $AOB\sphericalangle$ csúcsszöge, vagy 180°-ra kiegészítő szöge (belátható volna, hogy mindig az előbbi). A háromszög szögeinek szokásos jelölésével

$$AOB\sphericalangle = 180° - (OAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle) = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Másrészt CO felezi a γ szöget, és így a CEO derékszögű háromszögből

$$COE\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Így C_1C_2-nek és CE-nek a k_1 kör O pontjából vett látószöge valóban vagy egyenlő vagy egymást kiegészítő szöge. Ezt akartuk bizonyítani.

Varga Gabriella (Szombathely, Savaria g., II. o. t.)