I. A jobb oldali szakaszos tizedes törteket az 1302. feladat megoldásában [1] látott eljáráshoz hasonlóan két-két természetes szám A/B, ill. C/D hányadosává alakítjuk. Az első szakaszos tizedes tört hetedik tizedes jegye után az 538 461 szakasznak vég nélküli ismétlődése annak a következménye, hogy amikor az $A:B$ hányados számjegyeinek megállapításában 6,653 8461-ig jutottunk (és már az 1-essel adódó B részletszorzatot is levontuk a rész-osztandóból), akkor ugyanaz az R maradék ismétlődött meg, mint ami a hányados jegyeinek 6,6-ig való megállapítása után adódott, attól eltekintve, hogy R helyi értéke az utóbbi esetben $1/10$, az ismétlődéskor pedig $1/10\,000\,000 = 1/10^7$. Így a két maradékos osztás A következő előállításait adja:

$$A = B \cdot 6{,}6 \qquad\qquad + R/10,$$
$$\text{ill.} \quad A = B \cdot 6{,}653\,8461 + R/10^7,$$

és a második egyenlőség 10^6-szorosából az elsőt kivonva a keresett alak:
$(10^6 - 1)A = B(6\,653\,846{,}1 - 6{,}6)$,

$$\frac{A}{B} = \frac{66\,538\,461 - 66}{10 \cdot (10^6 - 1)} = \frac{66\,538\,395}{9\,999\,990} = \frac{173}{26}.$$

Az egyszerűsítésben felhasználtuk, hogy a nevező könnyen tényezőkre bontható:

$$999\,999 = 999 \cdot 1001, \qquad 999 = 27 \cdot 37, \qquad \text{és} \qquad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13;$$

eszerint az első szakaszos tizedes tört 173/26 tizedes törtté alakításából adódik, amiről könnyen meggyőződhetünk.

Hasonlóan a (2) egyenlet jobb oldalának közönséges tört alakja

$$\frac{C}{D} = \frac{5\,769\,230 - 5}{9\,999\,990} = \frac{15}{26}.$$

II. Szorozzuk mindkét egyenletet xy-nal, és adjunk az új első egyenlethez $2xy$-t, így az utolsó alak bal oldala egyenlő az új második egyenlet bal oldalának négyzetével

$$x^2 + y^2 = \frac{173}{26}xy, \tag{1a}$$

$$x + y = \frac{15}{26}xy, \tag{2a}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = \left(\frac{173}{26} + 2\right)xy = \frac{225}{26}xy, \tag{1b}$$

így előbb (1b)-t (2a)-val, majd (2a) négyzetét (1b)-vel osztva, rendezés után

$$x + y = 15, \qquad xy = 26.$$

(Felhasználtuk, hogy $x \neq 0$, és $y \neq 0$, hiszen különben az egyenletrendszernek nem volna értelme.) Eszerint x és y egyenlő a

$$z^2 - 15z + 26 = 0$$

egyenlet gyökeivel: 13-mal és 2-vel, bármelyik sorrendben:

$$x_1 = 13, \qquad y_1 = 2, \qquad \text{és} \qquad x_2 = y_1, \quad y_2 = x_1.$$

Az értékpár valóban kiegyenlíti az egyenletrendszert.

Steiner György (Budapest, Radnóti M. gyak. g. III. o. t.)
Baranyai Zsolt (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Új u változót vezetve be x/y helyett a végtelen tizedes törtek közönséges törtté alakítása után az

$$u + \frac{1}{u} = \frac{173}{26}, \qquad \frac{1}{y}\left(\frac{1}{u} + 1\right) = \frac{15}{26}, \qquad x = yu$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az elsőből u-ra $13/2$ és $2/13$ adódik, a másodikból $y = 2$, ill. 13, és a harmadikból $x = 13$, ill. 2.

Varga Gabriella (Szombathely, Savaria g. II. o. t.)

2. A megoldások nagyobb része a szakaszos tizedes tört közönséges törtté való átalakításának éppen azt a módját választotta, amelyről az 1302. feladat 2. megjegyzésében közöltük, hogy a középiskolai tananyagban nem tisztázott úton halad, végtelen sok jeggyel írt számokkal úgy végez kivonást, mint véges sok jeggyel írt számokkal szokás. Akik a fentiek szerint végezték az átalakítást, vagy említést tettek erről a kérdésről, 1 jutalompontot kaptak.

[1] Az 1302. feladat megoldásának tanulmányozását a szerkesztőség ajánlotta e gyakorlat kitűzésekor; lásd K. M. L. 30 (1965) 18. o.