I. megoldás. Képezzük az Aw, a Cv és a Bu szorzatot, és vegyük figyelembe a feltevést:

$$\begin{aligned} Aw &= w(uv+u+1) = uvw + uw + w = 1 + uw + w = C, \\ Cv &= v(wu+w+1) = 1 + vw + v = B, \\ Bu &= u(vw+v+1) = 1 + uv + u = A. \end{aligned} \tag{1}$$

Az elsőből $w = C/A$, a másodikból $v = B/C$, ezeket B kifejezésébe helyettesítve, majd az egyenlőséget AC-vel szorozva a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk:

$$B = \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{A} + \frac{B}{C} + 1, \qquad ABC = BC + AB + AC.$$

Bizonyításunk csak olyan u, v, w számhármasokra érvényes, amelyekre sem A, sem C nem 0. Az (1) egyenlőségekből látjuk, hogy ha A, B, C bármelyikéről tudjuk, hogy nem 0, akkor a másik kettő sem 0, hiszen $uvw = 1$ miatt u, v, w egyike sem 0. Ha viszont A, B, C egyike 0, akkor a másik kettő is egyenlő vele, így pedig a bizonyítandó egyenlőség fennáll. Ezzel a kimaradt esetre is bebizonyítottuk az állítást.

Karsai István (Szeged, Radnóti M. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Megoldásunk lényegében azonos a 812. gyakorlatra[1] közölt megoldással. Ott azt bizonyítottuk, hogy ha $uvw = 1$, akkor

$$\frac{1}{1+u+uv} + \frac{1}{1+v+vw} + \frac{1}{1+w+wu} = 1.$$

Ebből jelöléseinkkel $1/A + 1/B + 1/C = 1$, amiből a nevezők eltávolításával az állítás adódik.

Möller István

II. megoldás. Képezzük az alábbi számok szorzatát, figyelembe véve a feltevést, majd a jelöléseket:

$$A - 1 = u(v+1), \qquad B - 1 = v(w-1), \qquad C - 1 = w(u+1),$$

$$\begin{aligned} (A-1)(B-1)(C-1) &= uvw(u+1)(v+1)(w+1) = \\ &= 2 + uv + vw + wu + u + v + w = \\ &= A + B + C - 1. \end{aligned}$$

A bal oldalon is beszorozva

$$(ABC - AB - BC - CA) + (A + B + C - 1),$$

eszerint az első zárójel értéke 0. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Halász Ferenc (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

[1] K. M. L. 27 (1963) 153. o.