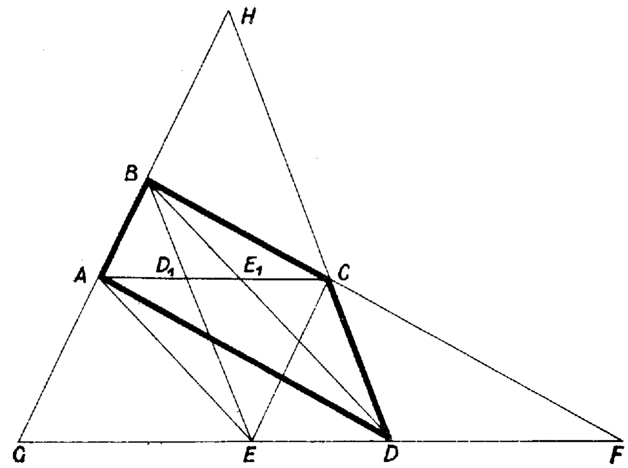
I. megoldás. Felhasználjuk a következő segédtételt. Megrajzolva egy trapéz átlóit, a keletkező 4 háromszög közül a trapéz alapjait tartalmazó két háromszög hasonló egymáshoz, mert szögeik páronként egyenlők. Megfelelő oldalpárjaik a trapéz két alapja és bármelyik átló két része. Ezért a trapéz átlói úgy vágják ketté egymást, hogy bármelyik átló részeinek aránya egyenlő a velük közös végponttal bíró alapok arányával.



Alkalmazzuk ezt az $ABCD$ és az $ABCE$ trapéz B-ből kiinduló átlóira. Legyen átlóik metszéspontja rendre E_1, ill. D_1. Így

$$DE_1 : E_1B = AD : BC, \quad \text{ill.} \quad ED_1 : D_1B = CE : AB,$$

és mivel a két aránypár második arányainak értéke a feltevés szerint egyenlő, azért az első arányok is egyenlők:

$$\frac{DE_1}{E_1B} = \frac{ED_1}{D_1B}, \text{ és mindkét oldalhoz 1-et adva } \frac{DB}{E_1B} = \frac{EB}{D_1B}.$$

Eszerint a BED és BD_1E_1 háromszögek hasonló helyzetűek, DE párhuzamos D_1E_1-gyel, azaz AC-vel, a feladat első állítása helyes.

A segédtételt ugyanazon két trapéz közös AC átlójára alkalmazva, az előzőkhöz hasonlóan

$$\frac{CD_1}{D_1A} = \frac{CE}{AB} = \frac{AD}{BC} = \frac{AE_1}{E_1C}, \qquad \frac{CA}{D_1A} = \frac{AC}{E_1C},$$

amiből $D_1A = E_1C$. Így a kétféleképpen kettéosztott AC átló másik darabjai is egyenlők: $D_1C = E_1A$. Az előbbi eredmény és a feltevés miatt az $AEDE_1$ négyszög paralelogramma, ezért $E_1A = DE$, tehát $D_1C = DE$. Ezek szerint D_1C és DE párhuzamos és egyenlő szakaszok, végpontjaik egy paralelogramma csúcsai, tehát CD párhuzamos D_1E-vel, azaz BE-vel. Ezzel a feladat második állítását is bebizonyítottuk.

Sólymos László (Pannonhalma, Benedek–rendi g. II. o. t.)

Megjegyzés. Azt kaptuk, hogy ha egy ötszögben három egymás utáni oldal rendre párhuzamos azzal az átlóval, amely a végpontjaikkal szomszédos csúcsokat köti össze, továbbá a mondott három oldal közül két szomszédos oldal aránya egyenlő a velük párhuzamos átlók arányával, akkor az ötszög további két oldala is párhuzamos a végpontjaival szomszédos csúcsokat összekötő átlóval.

Az oldalak és átlók ilyen páronkénti párhuzamossága a szabályos ötszögben is fennáll. Be lehet bizonyítani, hogy van olyan sík, és azon kitűzhetők egy szabályos ötszög csúcsai úgy, hogy ennek rajzunk síkjára való merőleges vetülete az $ABCDE$ ötszög.

II. megoldás. A D-ből AC-vel párhuzamosan húzott egyenes messe a BC egyenest F-ben. Ekkor $ADFC$ paralelogramma, s így $CF = AD$. Aránypárunk átrendezett alakját felhasználva

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CE}{AD} = \frac{AB}{BC}.$$

Itt párhuzamos oldalak aránya szerepel, tehát az ABC és ECF háromszögek hasonlók és hasonló helyzetűek. Ebből következik, hogy $EF \parallel AC$. Mivel $FD \parallel AC$ is fennáll, így D az EF egyenesen van, tehát $ED \parallel AC$, amint a feladat állítja.

A második párhuzamosság igazolásához meghatározzuk – felhasználva a már bizonyított párhuzamosságot – az AE/BD arányt. A DE és AB egyenesek metszéspontját G-vel jelölve $ACEG$ paralelogramma, így $AG = CE$, $AC = DF = GE$. A hasonló ADE és BFD háromszögekből

$$\frac{AE}{BD} = \frac{ED}{DF} = \frac{ED}{GE} = \frac{AB}{GA} = \frac{AB}{EC}.$$

Húzzunk C-ből BE-vel párhuzamost és jelöljük AB-vel való metszéspontját H-val. Ekkor $BH = EC$, s így az ABE és BHD háromszögek hasonlók, mert A-ból, ill. B-ből induló oldalaik párhuzamosak és arányuk egyenlő, így HD is párhuzamos BE-vel, HC is, tehát C a HD egyenesen van, s így CD is párhuzamos BE-vel.