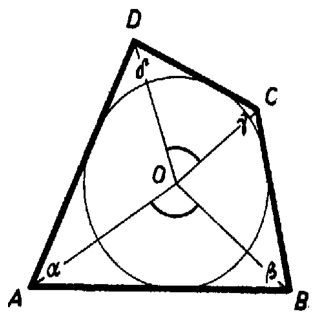
I. Ha a négyszög mindnégy oldalegyenesének a körrel való érintkezési pontja a négyszög oldalszakaszán van, akkor a kör nyilvánvalóan a négyszög belsejében van (1. ábra), és a négyszög belső szögeinek felezői átmennek O-n. Legyen az A, B, C, D csúcsnál levő szög rendre α, β, γ, δ. Így

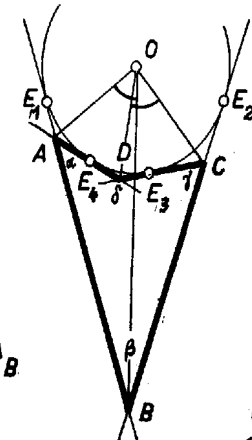
$$\begin{aligned} AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle &= 180^\circ - OAB\sphericalangle - OBA\sphericalangle + (180^\circ - OCD\sphericalangle - ODC\sphericalangle) = \\ &= 360^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180^\circ, \end{aligned}$$

mert a négyszög szögeinek összege 360°.

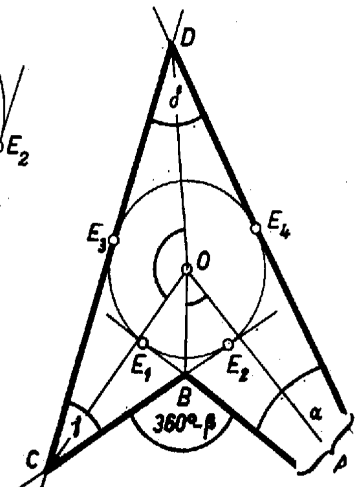
Ugyanez az érték adódik hasonló számítással a BOC és DOA szögek összegére is, vagy figyelembe vehetjük azt is, hogy a vizsgálandó négy szög összege 360°, így a másik két szög összege ismét 180°.



1.ábra



2.ábra



3.ábra

II. A második helyzettípushoz természetesen hozzáértjük, hogy a további két oldalegyenes érintési pontja oldalszakaszon van. A kört az oldalszakaszon kívüli pontjában érintő oldalegyenesek kölcsönös helyzetére két lehetőség van: a négyszög megfelelő oldalai szomszédosak (2. és 3. ábra, AB és BC), vagy szemben fekvők (4. ábra, AB és CD).

A 2. ábra esetében A és C a B-ből a körhöz húzható BE_1, ill. BE_2 érintőszakaszon van, másrészt a D-ből húzható DE_4, ill. DE_3 érintőszakasznak az érintési ponton túli meghosszabbításán, a négyszög konkáv, D-nél levő szöge nagyobb 180°-nál. Itt az A-ból húzható érintőszakaszok közti, a kört tartalmazó szögtartomány nagysága $180^\circ - \alpha$; hasonlóan

$$E_2CE_3\sphericalangle = 180^\circ - \gamma, \qquad E_3DE_4\sphericalangle = 360^\circ - \delta,$$

és az AO, CO, DO félegyenes rendre ezeket a szögeket felezi.

A kérdéses szögek:

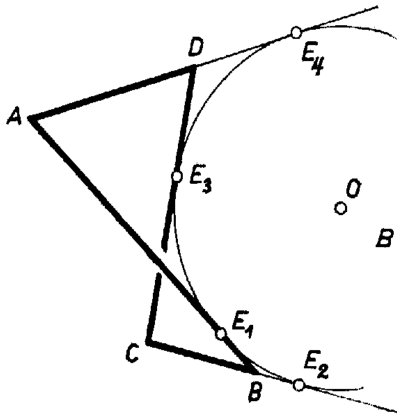
$$\begin{aligned} AOB\sphericalangle &= OAE_1\sphericalangle - OBE_1\sphericalangle = \frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}; \\ COD\sphericalangle &= 180^\circ - (OCE_3\sphericalangle + ODE_3\sphericalangle) = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ-\gamma+360^\circ-\delta}{2}\right) = \\ &= \frac{\gamma+\delta}{2} - 90^\circ, \end{aligned}$$

összegük $\gamma+\delta-180^\circ$, másképpen $180^\circ-\alpha-\beta$, ugyanis konkáv négyszögre is fennáll $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$. Továbbá hasonlóan

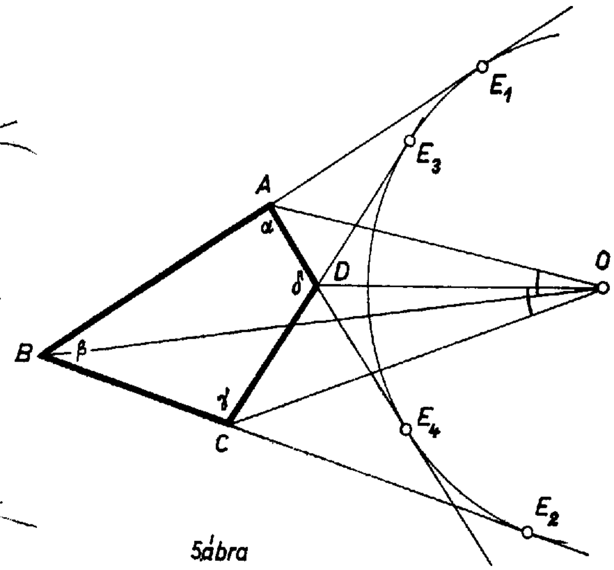
$$BOC\sphericalangle + DOA\sphericalangle = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha + \delta - 180^\circ.$$

A 3. ábra csak abban tér el a 2.-tól, hogy B van az AE_1 és CE_2 érintőszakaszon, a négyszög konkáv szöge B-nél van. Így

$$\begin{aligned} AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle &= \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \left(180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}\right) = \\ &= 180^\circ = BOC\sphericalangle + DOC\sphericalangle. \end{aligned}$$



4.ábra



5ábra

A 4. ábrán a feltevés hurkolt négyszöget eredményez. Ezzel az esettel nem foglalkozunk, mert már a négyszög szögeinek értelme is bizonytalanná válik itt.

III. Az utolsó vizsgálandó helyzettípusban, az 5. ábra esetében a kört tartalmazó szögtartomány a B csúcsban maga a β szögtartomány, D-ben a δ szög csúcsszögtartománya, A-ban és C-ben pedig α, ill. γ mellékszögtartománya. Így

$$\begin{aligned}
AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle &= (OAE_1\sphericalangle - OBE_1\sphericalangle) + (ODE_3\sphericalangle - OCE_3\sphericalangle) = \\
&= 180^\circ - \alpha - \beta, \\
BOC\sphericalangle + DOA\sphericalangle &= (OCE_2\sphericalangle - OBE_2\sphericalangle) + (ODE_4\sphericalangle - OAE_4\sphericalangle) = \\
&= 180^\circ - \beta - \gamma.
\end{aligned}$$

Palla László (Budapest, Piarista g. II. o. t.)
Vízvári Béla (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A feladattal a szerkesztőség arra kívánta ráirányítani az olvasók figyelmét, hogy a helyzet megváltozásával tételek kissé módosulhatnak, másrészt hogy egy négyszög mindegyik oldalegyenesét érintő kör lehet a négyszögön kívül is a háromszög esetéhez hasonlóan.

Az eredményeket egybevetve mondhatjuk, hogy ha a kör a négyszög belsejében van (1. és 3. ábra), akkor a kérdéses összegek egyenlők. Másrészt a 2. és 5. ábra helyzeteiben a két összegre ugyanaz a kifejezés adódott. Ezekben a helyzetekben észre lehetett volna venni az előbbi szép összefüggés helyébe azt, hogy $AOB\sphericalangle - COD\sphericalangle$ és $BOC\sphericalangle - DOA\sphericalangle$ különbségek egyenlők, közös értékük 0°, vagyis $AOB\sphericalangle = COD\sphericalangle$, és $BOC\sphericalangle = DOA\sphericalangle$. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Ajánljuk azt is az olvasóknak, vizsgálják meg a teljesség kedvéért, hogy ábráink feltüntetnek-e minden lehetséges helyzettípust.