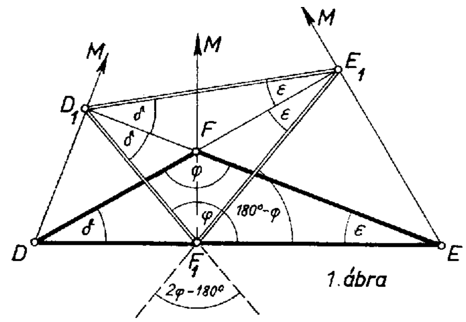
A szóban forgó $A_0B_0C_0 = T_0$ háromszög egymás utáni csúcsainál levő szög $180°/(1+4+10) = 12°$-nak rendre 1-szerese, 4-szerese, 10-szerese, azaz $\alpha_0 = 12°$, $\beta_0 = 48°$, $\gamma_0 = 120°$, a háromszög tompaszögű.



1. ábra

Az 1252. feladatban[1] láttuk, hogy ha a DEF háromszögben $EFD\sphericalangle = \varphi > 90°$ (1. ábra), akkor az egymás utáni csúcsokból húzott magasságok talppontjaival meghatározott $D_1E_1F_1$ talpponti háromszögnek szögei (az oldalak mint átmérők fölé irt Thalész-körökben fekvő DD_1E_1E, EE_1FF_1 és FF_1DD_1 húrnégyszögek felhasználásával)

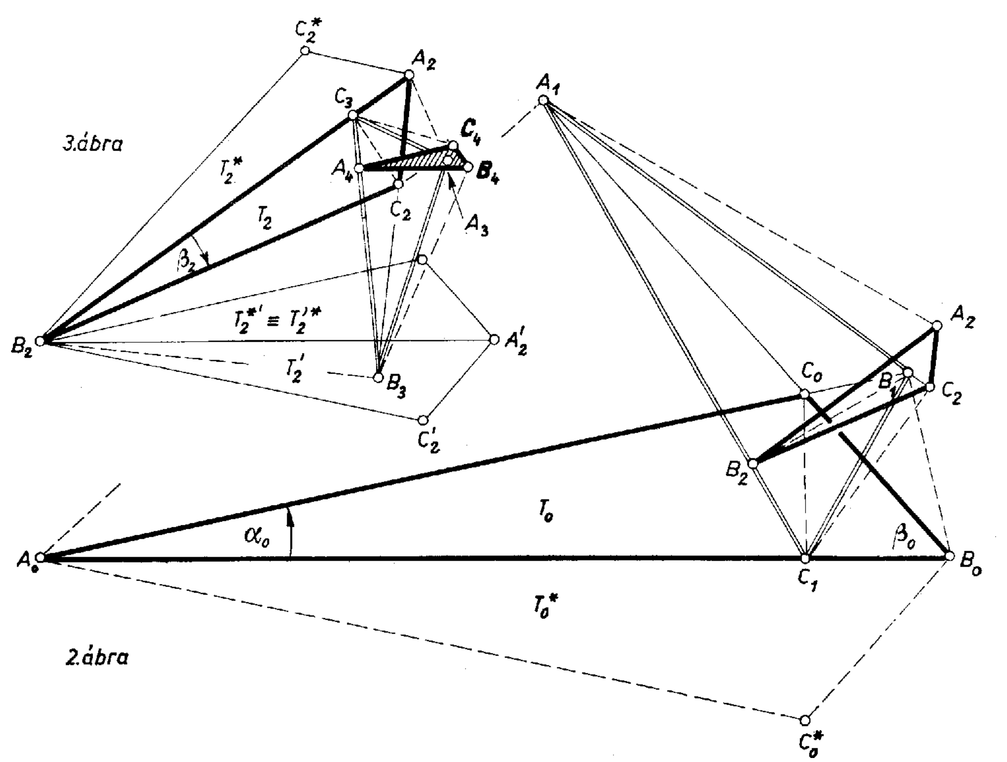
$$F_1D_1F_1\sphericalangle = \delta_1 = F_1D_1F\sphericalangle + ED_1E_1\sphericalangle = 2EDF\sphericalangle = 2\delta,$$
$$D_1E_1F_1\sphericalangle = \varepsilon_1 = D_1E_1D\sphericalangle + FE_1F_1\sphericalangle = 2FED\sphericalangle = 2\varepsilon,$$

és az EF_1D_1 háromszöget is felhasználva

$$\begin{aligned} E_1F_1D_1\sphericalangle = &\varphi_1 = EF_1D_1\sphericalangle - EF_1E_1\sphericalangle = (180° - \delta - \varepsilon) - EFE_1\sphericalangle = \\ = &\varphi - (180° - \varphi) = 2\varphi - 180°, \end{aligned}$$

és hasonlóan a DF_1E_1 háromszögből $E_1F_1D\sphericalangle = \varphi = EF_1D_1\sphericalangle$. Láttuk továbbá, hogy ($\varphi > 90°$ esetén) a talpponti háromszög csúcsainak D_1, E_1, F_1, D_1 sorrendben való körüljárása ellentétes irányú a kiindulási háromszög csúcsainak D, E, F, D sorrendben való körüljárási irányával.

Ezek szerint a T_0-hoz szerkesztett $A_1B_1C_1 = T_1$ talpponti háromszög (2. ábra) csúcsainál levő szögek nagysága rendre $\alpha_1 = 2\alpha_0 = 24°$, $\beta_1 = 2\beta_0 = 96°$, $\gamma_1 = 2\gamma_0 - 180° = 60°$, és mivel így T_1 a B_1 csúcsánál tompaszögű, azért a hozzá szerkesztett $A_2B_2C_2 = T_2$ talpponti háromszögnek, a T_0 szóban forgó második talpponti háromszögének szögei rendre $\alpha_2 = 48°$, $\beta_2 = 12°$, $\gamma_2 = 120°$. Látjuk, hogy $\alpha_2 = \beta_0$, $\beta_2 = \alpha_0$ és $\gamma_2 = \gamma_0$, vagyis T_2 hasonló T_0-hoz úgy, hogy az egymásnak megfelelő csúcs-párok A_0 és B_2, ill. B_0 és A_2, végül C_0 és C_2.



[1]A gyakorlat kitűzésekor a szerkesztőség ajánlotta az 1252. feladat megoldásának elolvasását, K. M. L. 30 (1965) 7. o.

Eszerint a hasonlóságban T_2 csúcsainak B_2, A_2, C_2 sorrendben való körüljárása felel meg T_0 csúcsai A_0, B_0, C_0 sorrendű körüljárásának. E két körüljárás ellentétes irányú, mert a

$$B_2,\ A_2,\ C_2; \qquad A_2,\ B_2,\ C_2; \qquad A_1,\ B_1,\ C_1 \qquad A_0,\ B_0,\ C_0$$

körüljárások iránya szomszédos páronként ellentétes, így a negyediké ellentétes irányú az elsőével. Ezért T_2 előállítható T_0 bármely (a síkban levő) tengelyre vonatkozó tükörképéből alkalmas forgatás és kicsinyítése[2] útján.

Induljunk ki T_0-nak a leghosszabb oldalára való $A_0B_0C_0^* = T_0^*$ tükörképéből, így a mondott forgatás szöge egyenlő az A_0B_0 irányt B_2A_2-be átvivő forgás szögével. Az A_0B_0 irányt C_1 körül C_1B_1-be $180^\circ - \gamma_0 = 60^\circ$-os forgás viszi át – abban az irányban, amely A_0B_0-t $\alpha_0 = 12^\circ$-os forgással viszi át A_0C_0-ba –, a C_1B_1-gyel megegyező C_1A_2 irányt A_2 körül B_2A_2-be $\alpha_2/2 = \alpha_1 = 24^\circ$-os, az előbbivel ellentétes irányú forgás, így a keresett forgás nagysága $60 - 24^\circ = 36^\circ$, abban az irányban, amely T_0 leghosszabb oldalát α_0 forgással viszi át a nagyságra következő oldalába. Ezzel meghatároztuk T_2-nek T_0-hoz képest elfoglalt állását.

Ebből már röviden megkapjuk T_0 negyedik talpponti háromszögének, T_4-nek T_0-hoz képest elfoglalt állását (3. ábra, amelyen $A_2B_2C_2$ a 2. ábrabelihez képest eltolva és 2-szeresre nagyítva látható), hiszen T_4 a T_2-nek második talpponti háromszöge. Így T_4 hasonló T_2-höz, tehát T_0-hoz is, és előállítható T_2-ből úgy, hogy ezt 36°-kal elforgatjuk abban az irányban, amely a leghosszabb oldalt β_2 (azaz α_0) forgással viszi át a nagyságra második oldalába, majd tükrözzük a leghosszabb oldalára, végül állását megtartva kellő mértékben kicsinyítjük. – A most mondott eljárásban a tükrözés és a forgatás sorrendjét felcseréltük, ez azonban nyilvánvalóan megengedett, a 3. ábrán az elforgatást az idom jele mellé tett vesszővel, a tükrözést ismét csillaggal jelöltük, és – mint látjuk – ${T_2}^{*\prime} = T_2^{\prime *}$.

Eszerint T_4 azonos állású ${T'}_2^*$-gal. Ez viszont azonos állású T_0-lal, hiszen leghosszabb oldalukra vonatkozó tükörképük, T_2' ill. T_0^* azonos állásúak, mert a fent mondott két forgatás T_0 és T_2 ellentétes irányú körüljárása miatt ellentétes irányú.

Mindezek szerint T_4 a T_0-lal azonos állású.

Laborczi Zoltán (Budapest, Fővárosi Iskolaszanatórium g. II. o. t.)
Márkus András (Sopron, Széchenyi I. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A forgatások szögének meghatározása nem volt lényeges. Elég lett volna azt kimondani, hogy a két forgatás nagyságra nézve egyenlő, irányuk ellentétes.

2. Eredményünkből következik, hogy T_0-nak 8., 12., 16., ... talpponti háromszöge is megegyező állású az eredeti háromszöggel, továbbá hogy T_2, T_6, T_{10}, ..., valamint T_1, T_5, T_9 ... és T_3, T_7, T_{11}, ... egymás közt ugyancsak egyező állású hasonló háromszögek (T_i az i-edik talpponti háromszög).

[2] Nem nehéz megmutatni, hogy a kicsinyítés aránya $1:4$, ez azonban kérdésünk szempontjából lényegtelen.