A hat alapú (vagy hatos) számrendszerben írt számoknak a tízes alapúban írtakétól való megkülönböztetésére előbbiek elejére, kitevő magasságba emelve és zárójellel elválasztva odaírjuk az alapszámot (10-es számrendszerben írva). Egy N szám hatos számrendszerben való felírásán

$$\begin{aligned}(1)\qquad N = {}^{6)}A_kA_{k-1}\ldots A_1A_0 = A_k\cdot 6^k + A_{k-1}\cdot 6^{k-1}+\ldots+\\ +A_1\cdot 6 + A_0 = A_k\cdot {}^{6)}10^k + A_{k-1}\cdot {}^{6)}10^{k-1}+\ldots+A_1\cdot {}^{6)}10 + A_0\end{aligned}$$

alakú előállítását értjük, ahol $0\le A_i\le 5$ ($i=0,\,1,\,\ldots,\,k-1,\,k$); az A_i-k a szám hatos számrendszerbeli számjegyei.

$$\text{Pl}^1.\ {}^{6)}21\,054 = 2\cdot 6^4 + 1\cdot 6^3 + 0\cdot 6^2 + 5\cdot 6 + 4 = 2832.$$

Az N ilyen felbontásában az utolsó tag kivételével a többiből kiemelhető 6, az utolsó kettő kivételével a többiből 6^2, az utolsó 3 tag kivételével 6^3 stb. Mivel 6 osztható 2-vel, 3-mal és 6-tal, így *N akkor osztható 2-vel, 3-mal, ill. $6={}^{6)}10$-val, ha az utolsó jegye osztható vele, különben nem.* Részletesebben: N akkor páros, ha utolsó jegye 0, 2 vagy 4, akkor osztható 3-mal, ha utolsó jegye 0 vagy 3, és akkor osztható 6-tal, ha utolsó jegye 0.

$6^2=36$ osztható a fentieken kívül többek közt 4-gyel és $9={}^{6)}13$-mal. Így *N osztható 4-gyel, ill. 9-cel, ha az utolsó két jegyével írt ${}^{6)}A_1A_0$ szám osztható vele, különben nem.* Hasonlóan 6^3 osztható $8={}^{6)}12$-vel, így *N osztható 8-cal, ha ${}^{6)}A_2A_1A_0$ osztható 8-cal, különben nem.* Ezek a szabályok a tízes számrendszerbeli 2-vel, 5-tel, 10-zel; 4-gyel, 25-tel, ill. 8-cal való oszthatósági szabályok megfelelői (és továbbiakkal volnának kiegészíthetők).

6-nak bármely hatványát 5-tel osztva a maradék 1, mert két egyenlő kitevőjű hatvány különbsége osztható az alapok különbségével:

$$(2)\qquad a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\ldots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}).$$

Eszerint $6^n-1=6^n-1^n=5\cdot K$, $6^n=5\cdot K+1$, ahol K egész (a második zárójelbeli összeg értéke, ha $a=6$, $b=1$). Így (1)-nek $A_n\cdot 6^n = A_n\cdot 5\cdot K + A_n$ tagja 5-tel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint A_n (A_n-t, ha $A_n<5$, 0-t, ha $A_n=5$), N osztási maradéka tehát annyi, mint számjegyeinek összegéé, $A_k+A_{k-1}+\ldots+A_1+A_0$-é. Eszerint *$N$ osztható 5-tel, ha (hatos számrendszerbeli) számjegyeinek összege osztható vele, különben nem.* (Ez a tízes számrendszerbeli 9-es és 3-as oszthatósági szabály megfelelője.)

Mivel $d=10=2\cdot 5$, és itt a tényezők relatív primek, azért *N akkor és csak akkor osztható $10={}^{6)}14$-gyel, ha 5-tel is, 2-vel is osztható, azaz ha jegyeinek összege osztható 5-tel, és utolsó jegye páros.*

Hátra van még $d=7$. A 6 hatványait 7-tel osztva a maradék váltakozva 6 és 1:

$$\begin{gathered}6=0\cdot 7+6,\quad 6^2=5\cdot 7+1,\quad 6^3=6\cdot 5\cdot 7+6=30\cdot 7+6,\\ 6^4=6\cdot 30\cdot 7+6^2=185\cdot 7+1,\ldots,\end{gathered}$$

általában $6^{2l}-1^{2l}$ és $6^{2l+1}-6=6(6^{2l}-1)$ osztható a (2) azonosság alapján $6^2-1=5\cdot 7$-tel, tehát 7-tel is. A 6 maradékot célszerűbb $7-1$-nek írni: így $6=1\cdot 7-1$, $6^3=31\cdot 7-1$, és 6 minden páratlan kitevőjű hatványa 1-gyel kisebb egy 7-tel osztható számnál.[2] Így

$$\begin{aligned}N = 7\cdot L + A_k\cdot(-1)^k + A_{k-1}\cdot(-1)^{k-1}+\ldots+A_2-A_1+A_0=\\ =7\cdot L+(A_0+A_2+\ldots)-(A_1+A_3+\ldots).\end{aligned}$$

Eszerint *azok és csak azok a számok oszthatók $7={}^{6)}11$-gyel, amelyekben a jobbról számítva páratlan*[3] *sorszámú jegyek összegéből levonva a páros sorszámúak összegét, a különbség osztható 7-tel.* (Ez megegyezik a tízes számrendszer 11-re vonatkozó oszthatósági szabályával.)

Szabados Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

---

[1] Kiolvasásnál nem célszerű a tízes számrendszerre vonatkozó „tíz”, „száz”, „ezer” stb. elnevezéseket használni, hanem egyszerűen „(hat alapú) kettő-egy-nulla-öt-négy”-nek olvasni ki.

[2] Ez közvetlenül is belátható az

$$a^{2l+1}-b^{2l+1}=(a+b)(a^{2l}-a^{2l-1}b+\ldots+a^2b^{2l-2}+ab^{2l-1}+b^{2l}$$

azonosság alapján.

[3] Ez ugyanaz, mint a páros indexű, mivel 0-tól kezdtük az indexezést.