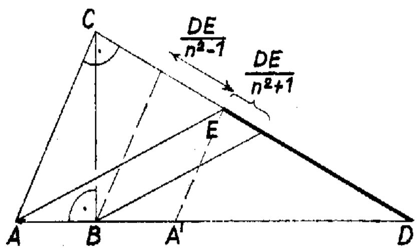
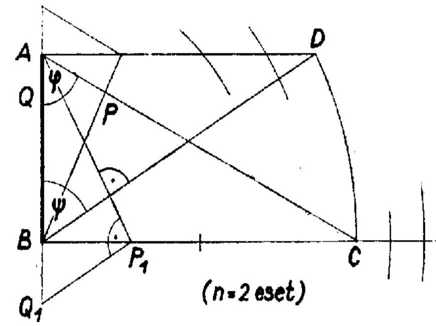
I. megoldás Egyszerűsítés úgy nyerhető, hogy egy szakasz k-szori felmérése helyett n-szeri felmérés után az n^2-szorost vagy egy ahhoz közeli többszöröst szerkesztünk meg a középarányossági tételek valamelyikével.



(n = 2 eset)



(n = 2 eset)

Mérjük fel pl. egy AB szakasz B végpontjában emelt merőlegesre a $BC = n \cdot AB$ szakaszt. Az AC-re C-ben emelt merőleges messe az AB egyenest D-ben. Ekkor az ACD háromszög BC magasságára

$$AB \cdot BD = BC^2 = n^2 \cdot AB^2, \qquad AD = AB + BD = (n^2+1)AB.$$

Hasonlóan az A pont B-re vonatkozó A' tükörképére $A'D = BD - AB = (n^2-1)AB$. Az adott DE szakasz (n^2+1)-ed és (n^2-1)-ed részét most már a szokásos módon szerkesztjük.

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldás ABC háromszögében $AC = \sqrt{n^2+1} \cdot AB$. Ezt felhasználhatjuk $AB/(n^2+1)$ megszerkesztésére. Legyen B merőleges vetülete AC-n P, és P-é AB-n Q. Az ABC és AQP háromszögek hasonlók, így

$$AP/AQ = AC/AB = \sqrt{n^2+1},$$

és az ABC háromszög AB befogójára

$$AB^2 = AC \cdot AP = \sqrt{n^2+1} \cdot AB \cdot \sqrt{n^2+1} \cdot AQ, \quad \text{így} \quad AQ = AB/(n^2+1).$$

Ha tehát AB-nek az adott távolságot választjuk, akkor AQ a szerkesztendő szakasz.

Messe a B körül $n \cdot AB$ sugárral húzott körív az AB-re A-ban emelt merőlegest D-ben, ekkor $AD = \sqrt{n^2-1} \cdot AB$. A BD-re A-ból bocsátott merőleges messe a BC egyenest P_1-ben, a P_1-ben AP_1-re állított merőleges az AB egyenest Q_1-ben. Ekkor az ABD és BQ_1P_1 háromszögek hasonlóságából $P_1B = \sqrt{n^2-1} \cdot BQ_1$, és az AP_1Q_1 derékszögű háromszög P_1B magasságára

$$(n^2-1) \cdot BQ_1^2 = P_1B^2 = AB \cdot BQ_1, \quad \text{amiből} \quad BQ_1 = AB/(n^2-1).$$

A kitűző megoldása nyomán

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás mutatja, hogy a feladat $k = n^2$-re és $-AB$-t ismételten felmérve A-n, ill. A'-n túl, $k = n^2+2$, n^2+3, stb. ill. n^2-2, n^2-3, stb. értékekre is megoldható a leírt módon. A II. megoldásban B-ből AC-t mérve BC-re, majd sorra az új átfogókat, kapjuk $\sqrt{n^2+2} \cdot AB$-t, $\sqrt{n^2+3} \cdot AB$-t stb. Viszont az AD távolsággal B-ből az AD egyenest metszve, és ezt az eljárást ismételve a befogón $\sqrt{n^2-2} \cdot AB$-t, $\sqrt{n^2-3} \cdot AB$-t stb. kapjuk. Így a II. megoldás eljárásai is alkalmazhatók $k = n^2+2$, n^2+3, ill. $k = n^2-2$, n^2-3, $\dots$ esetére is, a $k = n^2$ esetét pedig a BP-nek AD-vel való metszéspontjában BP-re állított merőleges és AB metszéspontjának A-tól mért távolsága szolgáltatja.

A szerkesztéseknek még számos módosítása, változata adható.

2. Többen számításokat végeztek – megállapítva, mit tekintenek elemi szerkesztési lépéseknek –, hogy mikor áll az új eljárás kevesebb lépésből a szokásosnál. Ezt sok minden befolyásolja, pl. a többszörösök felmérésénél alkalmazhatunk ismételt kétszerezést, majd a kapott szakaszokból tehetjük össze a kívánt többszöröst (pl. $13 = 8+4+1$, vagy $= 16-2-1$). Általában csak egy alkalmas korlát fölötti n-ekre áll az új eljárás kevesebb lépésből.

3. A II. megoldás következő trigonometriai magyarázatát adhatjuk: A megszerkesztett $CAB\sphericalangle = \varphi$ tangense n, így

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi + 1} = \cos^2\varphi, \text{ és } AQ = AP\cos\varphi = AB\cos^2\varphi = \frac{AB}{n^2+1}.$$

Hasonlóan a $\psi = ABD\sphericalangle$-re

$$\cos\psi = \frac{1}{n}, \quad \text{így} \quad \frac{1}{n^2-1} = \frac{(1/n)^2}{1-(1/n)^2} = \frac{\cos^2\psi}{1-\cos^2\psi} = \operatorname{cotg}^2\psi,$$

$$\text{és} \quad BQ_1 = BP_1 \operatorname{cotg}\psi = AB \operatorname{cotg}^2\psi = \frac{AB}{n^2-1}.$$