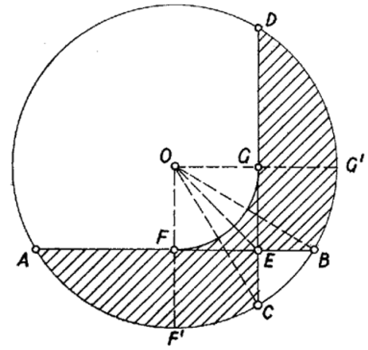
I. megoldás. Legyen a kör középpontja O sugara r, a húr kezdő helyzetének végpontjai A, B, felezőpontja F; fordulás közben A a rövidebb AB íven haladjon, A, B és F végső helyzete C, D, G. Így C még a rövidebb AB íven van, mert $AOB\sphericalangle = 120°$ és $AOC\sphericalangle = 90°$; legyen AB és CD metszéspontja E.

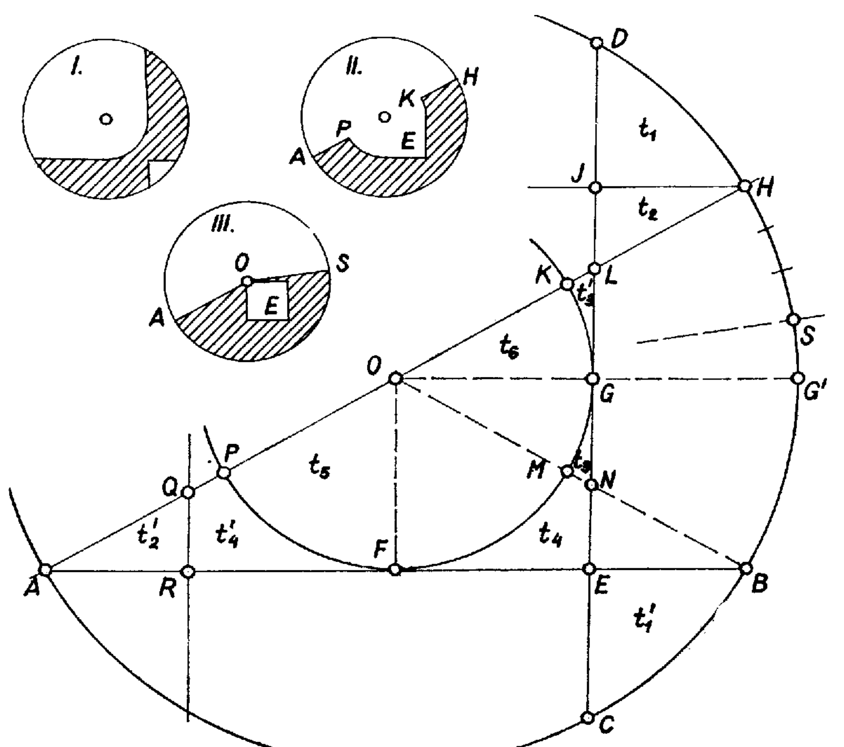


A mozgó húrnak O-hoz legközelebbi pontja F, legtávolabbiak A és B, minden az $OF = r/2$ és $OA = r$ közötti távolságban van pontja a húrnak (O-tól mérve), így a húr azt a területet súrolja, amelyet a hosszabb AD ív, az AF, GD szakaszok és az FG negyedkörív határol, kivéve a BC ív és az EB, EC szakaszok határolta területet. Meghúzva még az AB-t és CD-t felező OF', OG' sugarakat, a mondott terület az AFF' és DGG' fél-szeletek és az $FGG'F'$ körgyűrű-negyed összegének és a BCE idomnak a különbsége.

A fél-szeletek együttes területe az $AF'B$ szelet területével egyenlő, ami az OAB körcikk és az OAB háromszög területének különbsége, a BCE idom területét pedig a BCO körcikkből a BOE háromszög területe 2-szeresének kivonásával kapjuk, ugyanis a súrolt idom nyilvánvalóan szimmetrikus az OE tengelyre. Mivel $BOC\sphericalangle = 30°$, és $BF = r\sqrt{3}/2$, ezért a mondott részek és a teljes t terület:

$$ABF' = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}, \quad FF'G'G = \frac{\pi}{4}\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{3\pi r^2}{16},$$
$$BEC = \frac{r^2\pi}{12} - BE\cdot OF = \frac{r^2\pi}{12} - \frac{r^2}{4}(\sqrt{3}-1),$$
$$t = r^2\cdot\frac{7\pi-4}{16} \approx r^2\cdot 1{,}124.$$

Höss Rozália (Makó, József A. g. III. o. t.)



II. megoldás (vázlat). Fenti ábránkat kiegészítve az AH átmérővel, AB-nek és CD-nek O-ra való tükörképével és az O körüli OF sugarú körrel, majd az ábrán t_i-vel jelölt idomokat a t_i' helyzetbe áthelyezve ($i = 1, 2, 3, 4$) látjuk, hogy a súrolt idom területe egyenlő az $APFEGKHCA$ vonallal határolt idoméval. Az utóbbit úgy kapjuk, hogy a nagy kör feléből elvesszük a kis kör negyedrészét (6-od és 12-edrészének összegét) és az $r/2$ oldalú négyzetet:

$$t=\frac{r^2\pi}{2}-\frac{r^2\pi}{4\cdot 4}-\frac{r^2}{4}.$$

További meggondolás mutatja, hogy a kérdéses terület egyenlő az OAS körcikk és az $OFEG$ négyzet területeinek különbségével, ahol S a $G'H$ ív első negyedelő pontja. Ugyanis az OGK körcikk területénél az OPF körcikké 2-szer, $OG'H$-é 4-szer nagyobb, a $KGG'H$ körgyűrű-cikk területe pedig 3-szor, így az átdarabolással nyert idomhoz hozzávéve az OPF körcikket, el kell vennünk a gyűrű-cikk $2/3$ részét. A maradó $1/3$ rész egyenlő területű az OGK körcikkel, ezért – helyette r sugarú körcikket véve, annak íve $KG/2=G'H/4=G'S$ lesz.

Vigassy Lajos