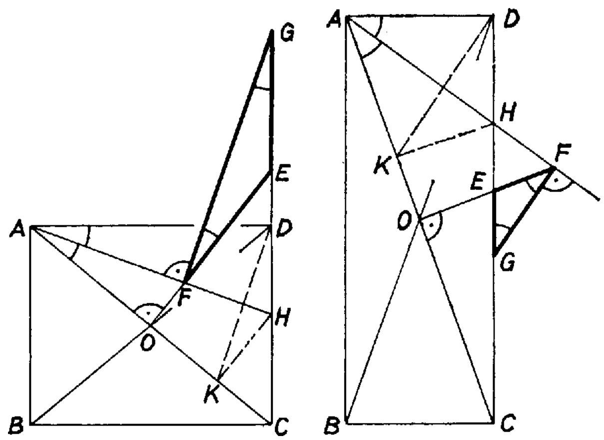
**I. megoldás.** *a)* Az $E$, $F$, $G$ pontok szerkesztésekor keletkező merőleges szárú szögek, ill. a szögfelezés révén következik – amennyiben megmutatjuk, hogy a fellépő szögek hegyesszögek –, hogy

$$EGF\sphericalangle = DAF\sphericalangle = FAC\sphericalangle = GFE\sphericalangle,$$

s így az $EFG$ háromszög egyenlő szárú.




A négy szög közül a középső kettő hegyesszög fele, s így hegyesszög. A másik kettő hegyesszög voltához azt mutatjuk meg, hogy $FEG$ tompaszög, éspedig az $OCE$ derékszögű háromszög $OEC$ hegyesszögének kiegészítő szöge. Jelöljük $AF$ és $CD$ metszéspontját $H$-val. Ha $F$ az $ACD$ háromszögben van, akkor $OFH$ és $CHF$ tompaszög, mert mindkettő hegyesszög mellékszöge, így $E$ a $CH$ egyenes $H$-n túli és $OF$-nek az $F$-en túli meghosszabbításán van. Ugyancsak $CHF$ tompaszög volta miatt, és mert $GF$ merőleges $AH$-ra, $G$ is a $CH$ $H$-n túli meghosszabbításán van. Mivel $GFH\sphericalangle = 90°$, és $EFH\sphericalangle$, mint $AFO\sphericalangle$ csúcsszöge, hegyesszög, így $FE$ a $GFH$ derékszögű szögtartományban halad, tehát a $C$, $H$, $E$, $G$ pontok ebben a sorrendben következnek, $FEG\sphericalangle$ tehát az $FEC\sphericalangle$ mellékszöge.

Ha $F$ az $ACD$ háromszögön kívül, tehát $AH$-nak a $H$-n túli meghosszabbításán van, akkor az $ACH$ háromszög $AC$ oldalszakaszát és az $AH$ oldal meghosszabbítását metsző $OF$ egyenes metszi a $CH$ oldalszakaszt. Másrészt $CHF\sphericalangle = DHA\sphericalangle$ hegyesszög, így az $AF$-re állított $FG$ merőleges is a $H$-ból $C$ felé menő félegyenest metszi, és mivel $AFO$ hegyesszög, $FE(= FO)$ a derékszögű $AFG$ szögtartományban halad. Így $E$ most is $G$ és $H$ közt van, tehát $FEG$ a $CEO$ szög mellékszöge. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*b)* Ha $F$ egybeesik $E$-vel, akkor $AF = AE = EC$, s így $DAE\sphericalangle = CAE\sphericalangle = ACE\sphericalangle$; másrészt e három szög összege $90°$, így mindegyik $30°$-os és $DAC\sphericalangle = 60°$. Ebben az esetben az $EFG\triangle$ elfajul ponttá.

*Szabados Katalin* (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

**II. megoldás.** *a)* Jelöljük $AF$ és $CD$ metszéspontját $H$-val, $H$-ból az $AC$-re bocsátott merőleges talppontját $K$-val. Ekkor $DHK$ egyenlő szárú háromszög, mert $H$, mint a szögfelező pontja, egyenlő távolságra van a szög két szárától: $HD = HK$. Ekkor $ADHK$ deltoid, $AH$ és $KD$ átlói merőlegesek. Így $HK \parallel EF$, $KD \parallel FG$ (merőlegesek $AC$-re, ill. $AF$-re) és $DH \parallel GE$ (egy egyenesen vannak). Az $EFG\triangle$ oldalai tehát párhuzamosak a $HKD\triangle$ megfelelő oldalaival, s így a két háromszög hasonló, tehát az $EFG\triangle$ is egyenlő szárú.

*b)* $E$ és $F$ akkor és csak akkor esik egybe, ha $K$ és $O$ egybeesik. Ekkor $KD$ a $BD$ átló fele, s így $ADHK$ deltoid volta miatt $KD = KA = AD$, tehát $ADK$ szabályos háromszög, $DAC\sphericalangle = DAK\sphericalangle = 60°$.

*Megjegyzés.* A *b)* kérdés tárgyalható számítás útján is Pythagoras tétele és a szögfelezőre vonatkozó osztásarány-tétel felhasználásával.

Legyen $CD = a$, $DA = b$, $AC = c$. Az $EOC$ és $ADC\triangle$-ek hasonlóságából $CE = c^2/2a$. Az osztás-arányból $CF = AC \cdot CD/(AD + AC) = ac/(b + c)$. Egyenlőségükből

$$c(b + c) = 2a^2 = 2c^2 - 2b^2 = (2c - 2b)(b + c),$$

így $c = 2b$, $ADC$ egy szabályos háromszög fele, $DAC\sphericalangle = 60°$.