I. A definíció szerint kiszámítva (2) értékét, összevonások és kiemelések után szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} D &= (ae+bg)(cf+dh)-(ce+dg)(af+bh) = \\ &= adeh+bcfg-adfg-bceh = ad(eh-fg)+bc(fg-eh) = \\ &= (ad-bc)(eh-fg), \end{aligned} \tag{4}$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}. \tag{5}$$

II. Ez az előállítás nyilvánvalóan nem az egyetlen lehetséges, hiszen a szorzat kommutatív volta miatt már maga (1) is többféleképpen írható másodrendű determináns alakjában, pl.:

$$ad-bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}, \tag{6}$$

amint az könnyen ellenőrizhető.

Az (5) alatti második tényezőt tükrözve a jobbra lejtő átlóra, az ún. főátlóra

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix}. \tag{7}$$

A jobb oldalból a (2) első sorának és első oszlopának közös mezején álló elem (az első sor első eleme) úgy keletkezik, hogy mindkét tényező első sorát vesszük, összeszorozzuk az első elemeket, a második elemeket és a szorzatokat összeadjuk. Ezt úgy fogjuk röviden mondani, hogy *komponáljuk* a két determináns első sorát. Hasonlóan a (2) szorzatdetermináns első sorának másik elemét (7) első tényezője első sorának és második tényezője második sorának *kompozíciója* adja. A szorzat második sorát az első tényező második sorának a második tényező első, ill. második sorával való kompozíciója adja.

Ha (2)-t (5)-tel hasonlítjuk össze, azt kapjuk, hogy a szorzat azzal a determinánssal is egyenlő, amelynek egy-egy eleme kiszámításához az első tényezőből az annyiadik sort és a másodikból az annyiadik oszlopot választjuk ki, ahányadik sorban, illetőleg oszlopban a kiszámítandó elem áll, és ezeket komponáljuk.

Hasonlóan az első tényező oszlopait a második soraival, vagy mind a két tényezőből az oszlopokat komponálva is kaphatunk olyan determinánst, aminek értéke a két tényező szorzatával egyenlő.

III. Most már a két tényezőt (6) alapján más determináns alakba írva, majd a szorzat-determinánst sor – sor. ill sor – oszlop kompozícióval képezve

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h & f \\ g & e \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ah+cf & ag+ce \\ bh+df & bg+de \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} ah+cg & af+ce \\ bh+dg & bf+de \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A főátló elemeinek szorzatából kivonva a másik átló elemeinek szorzatát – röviden a determináns *kifejtése* útján – mindkét alakból (4)-re jutunk.

IV. A (3) szorzat mindegyik tényezője írható másodrendű determinánsként. Előbb az első, majd a második szorzás eredményét sor – oszlop kompozícióval másodrendű determinánssá alakítva:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & m \\ n & l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & v \\ z & y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ak+cn & am+cl \\ dk+bn & dm+bl \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & v \\ z & y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} akx+cnx+amz+clz & akv+cnv+amy+cly \\ dkx+bnx+dmz+blz & dkv+bnv+dmy+bly \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ugyanezt a determinánst kapjuk, ha az első tényezőt a második és a harmadik tényező szorzatával ugyanezen előírás szerint számítjuk. Ha azonban sor–sor szorzást alkalmazunk, akkor a kétféle csoportosítás már más-más alakban adja a szorzatot.

V. Más elgondolás alapján is átírhatjuk (3)-at. Jelöljük a 2. és a 3. tényező értékét K-val, ill. X-szel.

$$\begin{aligned} KX = K\begin{vmatrix} x & z \\ v & y \end{vmatrix} = K(xy-zv) = (Kx)y-(Kz)v &= \begin{vmatrix} Kx & Kz \\ v & y \end{vmatrix}, \\ = (Kx)y-(Kv)z &= \begin{vmatrix} Kx & z \\ Kv & y \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Eszerint egy másodrendű determinánsnak – itt X-nek – egy K számmal való szorzata egyenlő egy olyan másodrendű determinánssal, melynek egyik sora vagy oszlopa X megfelelő sorának, ill. oszlopának a K-szorosa, a másik sora, ill. oszlopa pedig megegyezik X megfelelő sorával, ill. oszlopával.

Eszerint a (3) kifejezés is többféleképpen írható másodrendű determináns alakban, pl. (7) és (8) felhasználásával így:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Kx & z \\ Kv & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Kax+Kcv & Kdx+Kbv \\ az+cy & dz+by \end{vmatrix}.$$

Két más lehetséges alak a sok közül a következő:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \cdot K \cdot X = \begin{vmatrix} Xa & Xc \\ Kd & Kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} KXa & Xc \\ Kd & b \end{vmatrix}.$$

Bulkai Tamás (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. I. o. t.)
Kósa Márton (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. II. o. t.)
Kövesdi Gyula (Budapest, Bem J. g. III. o. t.)