I. megoldás. A bizonyítandó állítás szemléletes jelentése az, hogy a számegyenes origójából kiindulva és egymás után x hosszúságú szakaszokat felmérve – legalább egyszer belelépünk a $4/3$ és 2 számokat ábrázoló pontok közti szakaszba, esetleg éppen a szakasz jobb oldali végpontjába. Ez magától értetődő akkor, ha x nem nagyobb, mint a szakasz hossza, azaz $2/3$.

Ha mármost $2/3 < x \leq 1$, akkor $4/3 < 2x \leq 2$, vagyis a $k = 2$ érték ebben az esetben is megfelel. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Visszatérve az $x \leq 2/3$ esetre, az is nyilvánvaló, hogy a megfelelő k értékek számát az az egész szám adja meg, ahányszor az x hosszúságú szakasz megvan a vizsgált szakasz $2/3$ hosszában, vagyis $[3x/2]$. (Szögletes zárójellel szokás jelölni azt a legnagyobb egész számot, amely még nem nagyobb a zárójelben levő számnál; rövidebb elnevezéssel a szám *egész részét.*)

Fövényesi Ildikó (Miskolc, Ipari Szakközépisk. II. o. t.)

II. megoldás. A feltevés miatt $1/x$ az 1-nél nem kisebb pozitív szám, így két szomszédos pozitív egész szám közé esik, esetleg egyenlő a kisebbikkel. E két szám kisebbikét a-val jelölve

$$a \leq \frac{1}{x} < a+1, \quad \text{és így} \quad \frac{1}{a+1} < x \leq \frac{1}{a}, \tag{2}$$

ahol $a \geq 1$.

Szorozzuk (2)-t a $k = 2a$ számmal, hogy a felső korlát megegyezzék az (1)-belivel:

$$\frac{2a}{a+1} < kx \leq 2.$$

Ha itt a bal oldal nem kisebb $4/3$-nál, akkor kx-ra teljesül (1), tehát $k = 2a$ megfelelő szám, amennyiben

$$\frac{2a}{a+1} \geq \frac{4}{3}, \text{ azaz, ha } \ a \geq 2.$$

A fennmaradó $a = 1$ esetben, vagyis ha

$$1/2 < x \leq 1, \tag{3}$$

$k = 4$ már túl nagy, csak $k = 2$ és $k = 3$ lehet megfelelő. Keressük meg, mely x-ekre felelnek meg ezek az értékek.

$$4/3 < 2x \leq 2 \ \text{ teljesül, ha } \ 2/3 < x \leq 1,$$
$$4/3 < 3x \leq 2 \ \text{ teljesül, ha } \ 4/9 < x \leq 2/3,$$

ezek szerint $k = 2$ és 3 egyike mindenesetre megfelel, ha $4/9 < x \leq 1$. Itt $4/9 < 1/2$, ezzel beláttuk, hogy (3) minden x számához is tartozik megfelelő k szám.

Fencsik Gábor (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)