I. megoldás. A kérdéses egyenlőség nem mindig igaz, mert ha F-et az AB oldal felezőpontjában választjuk, EF és AC párhuzamosak, az M pont nem jön létre. Ebben és csak ebben az esetben G a B-be esik, CG párhuzamos AD-vel, N sem jön létre. Semmitmondó az állítás, ha F – és vele G is – az A-ba esik, mert M, N, A egybeesnek. M és N az F minden más helyzetében külön-külön létrejön; megmutatjuk, hogy ekkor a kérdéses egyenlőség fennáll.

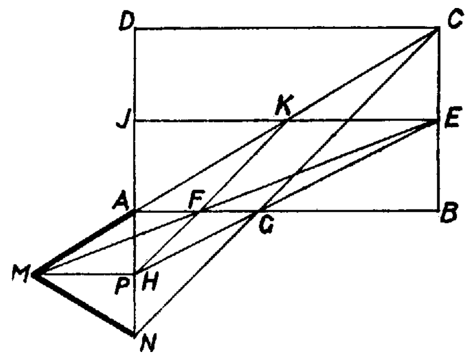
Messe EG az AD-t H-ban, és legyen a téglalap AB-vel párhuzamos középvonala EJ, ez AC-t a téglalap K középpontjában metszi, $JK = KE$, és $AK = KC$. Ekkor HK az EJH háromszög súlyvonala, felezi AB-nek a háromszögbe eső AG szakaszát, vagyis átmegy F-en. KF az ACG háromszög középvonala, mert felezi AC-t és AG-t, így párhuzamos CG-vel, ekkor pedig KH az ACN háromszög középvonala, ezért H felezi AN-t.

Az EKH, GFH és az EKM, FAM háromszög-párok hasonlóságából

$$HF : HK = FG : KE = AF : KE = MA : MK,$$

így MH párhuzamos AF-fel, tehát merőleges AN-re, vagyis az AMN háromszög AN alapjának H felezőpontját az M csúccsal összekötő egyenes merőleges az alapra. Így a háromszög egyenlő szárú: $MA = MN$.

Horváth Sándor (Budapest, I. István g. I. o. t.)



II. megoldás. Az AMN háromszög egyenlő szárú voltát avval bizonyítjuk, hogy M-ből húzott magasságának P talppontja felezi az AN alapot. Az AMP, CAB és az AGN, BGC háromszögpárok hasonlóságából:

$$AP = \frac{AM}{AC} \cdot BC, \qquad AN = \frac{AG}{BG} \cdot BC, \qquad \text{így} \qquad \frac{AP}{AN} = \frac{AM \cdot BG}{AC \cdot AG}.$$

Az MAF és MKE háromszögek hasonlóságából (K jelentése a fenti)

$$MK = MA + \frac{AC}{2} = \frac{KE}{AF} \cdot MA,$$

innen

$$MA = \frac{AC \cdot AF}{2KE - 2AF} = \frac{AC \cdot AF}{AB - AG} = \frac{AC \cdot AG}{2BG},$$

amit a fenti hányadosba helyettesítve $AP/AN = 1/2$ (vagyis P azonos a fenti H ponttal). Ezt akartuk bizonyítani.

Domokos Zsuzsanna (Makó, József A. g. III. o. t.)