Jelöljük a törteket a felsorolás sorrendjében A, B, C, D, E, F betűvel. Látni fogjuk, hogy a mondott feltételek mellett a törtek közül egyes párokról eldönthető, melyik számuk a kisebb, más párok tagjai közül lehet az egyik is, a másik is kisebb a, b, c, d alkalmas megválasztásával, és lehetnek egyenlők is.

A feltételekből következik, hogy minden számláló és nevező pozitív. Így az egyenlő nevezőjű C és E, továbbá D és F közül a nagyobb számlálójú első a nagyobb, az egyenlő számlálójú C és D, továbbá E és F közül pedig a kisebb nevezőjű második a nagyobb. Ezekből már $E < D$ is következik.

Hasonlítsuk össze A-t és B-t C-vel:

$$A - C = \frac{ad - bc}{b(b+d)}, \qquad B - C = \frac{bc - ad}{(b+d)d}.$$

A számlálók egymás negatívjai, és mindig az utóbbi pozitív [1], így $A < C < B$, amiből az előzők alapján $A < D$ és $E < B$ is következik.

Megmutatjuk, hogy a további párok nagyságviszonyát a feltételek nem határozzák meg. Közös nevezőnek mindig a nevezők szorzatát választva $C - F$ számlálója

$$(a+c)(b-d) - (c-a)(b+d) = 2(ab - cd) = 2ad\left(\frac{b}{d} - \frac{c}{a}\right).$$

Az utolsó zárójelbeli különbség tagjai a feltevés szerint 1-nél nagyobb számok, további követelmény azonban nem áll fenn rájuk, így bármelyikük lehet kisebb a másiknál, tehát a számláló, és vele a $C - F$ különbség is lehet akár pozitív, akár negatív, akár 0. Így C és F nagyságviszonyát pusztán a feltevések alapján nem lehet eldönteni.

$A - F$ számlálója $2ab - ad - bc$. Rögzítsük a, b és d értékét. Ekkor a számláló a

$$c = c_0 = \frac{2ab - ad}{b} = a\left(2 - \frac{d}{b}\right)$$

érték mellett 0 lesz. c_0 megfelel a feltevésnek, mert a zárójelben 1-nél nagyobb szám áll. Eszerint választható a, b, c, d úgy, hogy $A = F$. c_0-nál nagyobb, ill. kisebb értéket választva c-nek, a számláló csökken, ill. növekszik, így $A < F$ és $A > F$ is lehetséges.

Hasonlóan $B - F$ számlálója $ad + bc - 2cd$; ez 0, ha

$$a = c\left(2 - \frac{b}{d}\right) < c,$$

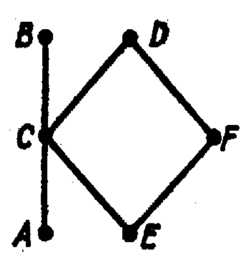
és innen a pozitívnak adódik, ha d-t nagyobbnak választjuk b felénél.

Még egyszerűbb az utolsó két összehasonlítás:

$$A - E = 0, \quad \text{ha} \quad c = a\left(2 + \frac{d}{b}\right), \qquad B - D = 0, \quad \text{ha} \quad b = d\left(2 + \frac{a}{c}\right).$$

Ennyiből a fentiekhez hasonlóan belátható, hogy B és F, B és D, valamint A és E között is 3-féle nagyságviszony állhat fenn.

Eredményeinket az ábra szemlélteti. Egy szám kisebb a másiknál, ha el lehet jutni az előbbit ábrázoló pontból az utóbbit ábrázoló pontba állandóan emelkedő úton (pl. A-ból C-be, B-be vagy D-be). Ha viszont ilyen út nincs köztük, akkor bármi lehet köztük a nagyságviszony a, b, c, d alkalmas, a feltételeket kielégítő választása mellett.



Az ábráról az is leolvasható, hogy legfeljebb három olyat lehet kiválasztani számaink közül, amelyek bármely, a feltételeknek megfelelő a, b, c, d értékrendszer esetére ugyanabban a sorrendben következnek nagyság szerint. Ezek

$$A < C < B, \quad A < C < D, \quad E < C < B, \quad E < C < D, \quad E < F < D.$$

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

[1] Ugyanis $bc - ad = bc - cd + cd - ad = (b-d)c + (c-a)d > 0$.