I. A PQD és PAB, továbbá a PQR és PAM hasonló háromszögpárok megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így

$$\frac{MR}{AB}=\frac{DQ}{AB}=\frac{QP}{AP}=\frac{RP}{MP}=\frac{MR-MP}{MP}=\frac{MR}{MP}-1,$$

és így MR-rel osztva

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{MP}-\frac{1}{MR}. \tag{1}$$

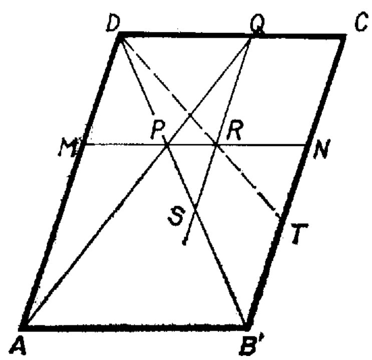
A PQS, PAD és PQR, PAM hasonló háromszög-párok megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így

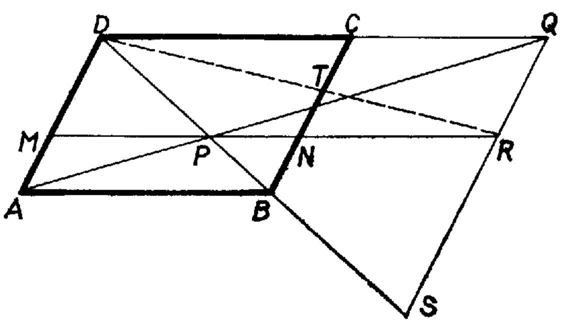
$$\frac{BC}{QS}=\frac{AD}{QS}=\frac{AP}{QP}=\frac{AM}{QR}=\frac{AD-DM}{QR}=\frac{BC-QR}{QR}=\frac{BC}{QR}-1.$$

Innen BC-vel osztva és rendezve

$$\frac{1}{BC}=\frac{1}{QR}-\frac{1}{QS}. \tag{2}$$

(1) és (2) az előírt szakasz-hármasok közti egyszerű összefüggések. Ha M az AD oldal belső pontja, az ábra létrejön, (1) és (2) érvényesek; $M=A$ esetén már Q sem jön létre, $M=D$ esetén pedig M, D, P, Q, R, S egybeesik.





II. A B, C, Q, N pontokból megszerkeszthető R is, így (2)-ből meghatározható QS:

$$\frac{1}{QS}=\frac{1}{QR}-\frac{1}{BC}=\frac{BC-QR}{QR\cdot BC}=\frac{BC-CN}{QR\cdot BC}=\frac{BN}{QR\cdot BC},\quad \frac{QR}{QS}=\frac{BN}{BC}.$$

Messe DR a BC egyenest T-ben, ekkor $QR/QS=CT/CB$, tehát $CT=BN$. Ennek alapján a következő szerkesztés látszik célravezetőnek.

Legyen T az N pont tükörképe a BC szakasz középpontjára, továbbá RT és CQ metszéspontja D, a B-n át CD-vel és D-n át BC-vel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja A.

Be kell látnunk, hogy az $ABCD$ paralelogrammából és az $MN=NR$ egyenesből kiindulva az adott Q ponthoz jutunk. Tegyük fel, hogy a Q', R', S' pontok adódnak, továbbá jelöljük BD és QR metszéspontját S-sel. Ekkor egyrészt szerkesztés szerint teljesül

$$\frac{QR}{QS}=\frac{CT}{CB}=\frac{BN}{CB}=\frac{BC-QR}{CB},$$

tehát teljesül (2), másrészt teljesül

$$\frac{1}{BC}=\frac{1}{Q'R'}-\frac{1}{Q'S'}.$$

Mivel $Q'R'=QR$, így $Q'S'=QS$, de ez csak úgy lehet, ha $Q=Q'$, mert BD és CD nem párhuzamos.

D mindig létrejön, kivéve, ha N a BC szakasz felezőpontja.

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Belátható az is, hogy MB és QS metszéspontja a Q pont R-re vonatkozó tükörképe, ami szintén módot ad a szerkesztésre.