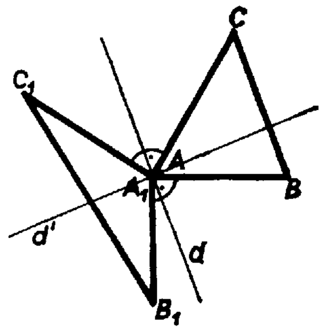
I. megoldás. Legyenek a háromszögek $ABC = H$ és $A_1B_1C_1 = H_1$ és legyen $A_1B_1 \perp AB$, $A_1C_1 \perp AC$. Ekkor a merőleges szárú szögekre ismert tétel szerint a $B_1A_1C_1$ szög vagy egyenlő a BAC szöggel, vagy kiegészítik egymást 180°-ra, és mindkét állítás teljesül, ha $BAC\sphericalangle = 90°$. Így elég azt megmutatnunk, hogy ha $BAC\sphericalangle < 90°$ és $B_1A_1C_1\sphericalangle = 180° - BAC\sphericalangle$ $(> 90°)$, akkor a BC-re merőleges egyenes metszi B_1C_1-et (így B_1C_1 nem lehet merőleges BC-re).



Toljuk el H_1-et úgy, hogy A_1 egybeessék A-val. (Az ábrán H_1-nek ez a helyzete látható.) Ezzel az oldalak merőlegessége nem változik meg. Húzzuk meg A-n át a BC-vel párhuzamos d egyenest. Ez az AB és AC egyenesek határolta két tompaszögű szögtartományon halad át (különben metszené BC-t).

Az ábrát A körül 90°-kal elforgatva (bármelyik irányban) az AB egyenes A_1B_1-be, AC az A_1C_1-be megy át, d pedig a rá merőleges d' egyenesbe. Így d' az A_1B_1 és A_1C_1 egyenesek határolta, tompaszögű szögtartományokon halad át, s így metszi a B_1C_1 szakaszt. Ezt akartuk bizonyítani.

Semsey András (Budapest, Radnóti M. g. I. o. t.)

II. megoldás. Tudjuk, hogy egy szög és a rá merőleges oldalak közti szög vagy egyenlő, vagy az összegük 180°. Ezt felhasználva a szögekre vonatkozó számítással igazoljuk, hogy egyik megfelelő szögpárra sem állhat a második eset (hacsak nem derékszögről van szó). Legyenek a háromszögek A, B, C, A_1, B_1, C_1 csúcsánál levő szögek α, β, γ, α_1, β_1, γ_1. Ekkor

$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 = 360°.$$

Ha $\alpha + \alpha_1 = 180°$, akkor

$$\beta + \beta_1 + \gamma + \gamma_1 = 180°.$$

Így egy második szögpár összege már nem lehet 180°, mert ekkor a harmadik szögpár mindegyike 0° lenne. Ekkor azonban

$$\beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1 \quad \text{és így} \quad \beta + \gamma = 90° = 180° - \alpha,$$

vagyis $\alpha = 90° = \alpha_1$, tehát a megfelelő szögek ez esetben is egyenlők.