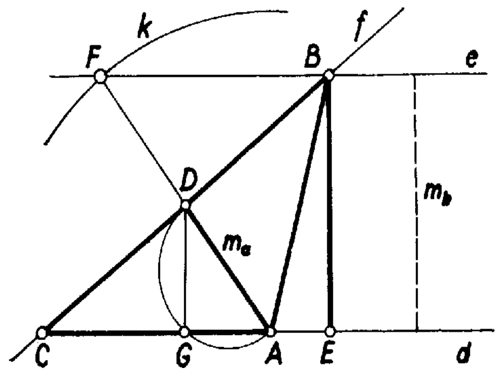
I. megoldás. Legyen a keresett háromszög $ABC = H$, amelyben $AB = AC$, az A-ból húzott AD és a B-ből húzott BE magasság egyenlő az alaphoz tartozó m_a, ill. a szárhoz tartozó m_b adott magassággal (l. ábra). Tükrözzük H-t a D pontra. Így B és C egymás képei – mert az egyenlő szárú háromszög tengelybeli magasságának talppontja felezi az alapot –, A képe pedig legyen F. A $BACF = R$ négyszög rombusz, mert oldalai egyenlők, és ebben ismerjük a BE magasságot és az $AF = 2AD = 2m_a$ átlót. Ennek alapján R és vele H az alábbiak szerint szerkeszthető.



1. ábra

Tetszés szerinti d egyenes egyik oldalán, tőle m_b távolságban vele párhuzamos e egyenest szerkesztünk; d-nek egy tetszés szerinti A pontja körül $2\,m_a$ sugárral k kört írunk, ennek e-vel való egyik metszéspontja F; ekkor R hátra levő B, C csúcsait az AF szakasz f felező merőlegese metszi ki e-ből, ill. d-ből, és a keresett háromszög $H = ABC$ (vagy FBC).

H megfelel a követelményeknek, mert B-ből húzott magassága m_b, A-ból húzott magassága pedig az AF szakasznak a BC-vel való D metszéspontig terjedő szakasza: $AD = AF/2 = m_a$.

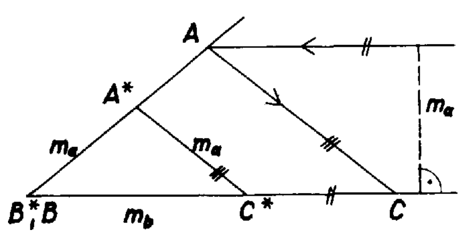
H létrejön, ha k két pontban metszi e-t, azaz ha $2\,m_a > m_b$, mert ekkor AF nem merőleges e-re, és így f metszi e-t (és d-t). Lényegében csak egy megoldás van. Könnyű belátni ugyanis, hogy ha F helyett e és k másik metszéspontját vennénk, vagy ha e-t d másik partján vennénk, az ugyanígy végzett szerkesztéssel H tükörképét kapnánk vagy arra a tengelyre, amely A-ban merőlegesen áll d-re, vagy a d tengelyre, vagy az A pontra.

Ambrus Gábor (Budapest, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A fentivel lényegében azonosak a következő szerkesztések: Legyen az $ADC\,\Delta$ D-ből húzott magassága DG. Ez párhuzamos BE-vel és fele akkora, mert a $CBE\,\Delta$ középvonala. d-re merőlegest állítunk (G-ben), felmérjük rá $m_b/2$-t, a végpont körüli m_a sugarú kör d-ből kimetszi A-t, az AD-re D-ben állított merőleges d-ből kimetszi C-t, végül C-nek D-re vett tükörképe B.

Kezdhetjük a szerkesztést az AD tengely helyzetének (vagy ami ugyanaz, a BC alap egyenesének és a D felezőpontjának) megválasztásával is, ekkor G-t az AD fölé írt Thalész-körből a D körül $m_b/2$ sugárral írt kör metszi ki. Ugyanezt még így is mondhatjuk: a D körül $m_b/2$ sugárral írt körhöz a D-től m_a távolságban levő A pontból húzott érintők adják H szárait, alapját pedig a DA-ra D-ben állított merőleges.

Szalay Marianne (Budapest, I. István g. I. o. t.)
Kuluncsich Tibor (Baja, Tóth K. g. I. o. t.)



2. ábra

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit használjuk, legyen továbbá $BC = a$, $AC = b$. H területe kétszeresének kétféle kifejezéséből

$$am_a = bm_b, \qquad a : b = m_b : m_a.$$

Eszerint ha H^* egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk m_b-vel, mint alappal és m_a-val, mint szárral, ez hasonló a keresett H-hoz, tehát H a H^*-ból hasonlósági transzformációval megszerkeszthető. A 2. ábrán a hasonlóság középpontja a $B^* = B$ pont. – A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasóra bízzuk. – A háromszög létrejön, ha $m_a + m_a > m_b$.

Horváth László (Szeged, Radnóti M. g. II. o. t.)