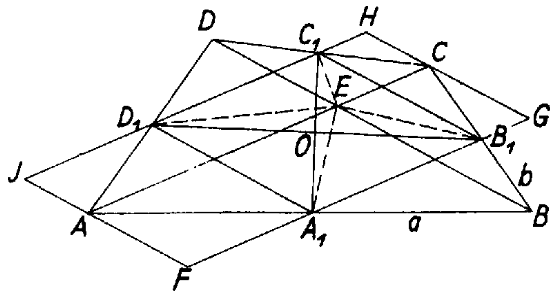
Legyen a kérdéses négyszög $ABCD = N$, egymás utáni AB, BC, CD, DA oldalának felezőpontja rendre A_1, B_1, C_1, D_1; így $AC = BD = e$, $A_1C_1 + B_1D_1 = s$, $AB = a$, $BC = b$.



Az $A_1B_1C_1D_1 = N_1$ négyszög paralelogramma, mert A_1B_1 és C_1D_1 oldalai párhuzamosak az AC átlóval és fele akkorák: $A_1B_1 \# C_1D_1 = e/2$, hiszen pl. A_1B_1 az ABC háromszög AC oldalához tartozó középvonal. Ugyanígy $B_1C_1 = BD/2 = e/2$, ezért N_1 rombusz. Elegendő ennek területét meghatároznunk, mert N területe kétszer akkora, mint N_1-é. Ugyanis N átlóinak E metszéspontját N_1 csúcsaival összekötve N_1 négy háromszögre oszlik, és ezek területe rendre egyenlő az N_1 megfelelő oldala által N-ből lemetszett háromszög területével, pl. EA_1B_1 és BA_1B_1 területe egyenlő, mert A_1B_1 alapjuk közös, és az erre merőleges magasságuk egyenlő. Így N területének N_1 kerületén belüli része egyenlő a kívül eső részével. Ezt akartuk bizonyítani.

N_1 átlói merőlegesek, ezért területe egyenlő azok szorzatának felével, így N-nek t területét az $A_1C_1 \cdot B_1D_1$ szorzat adja meg. Ez kifejezhető az egyes átlók meghatározása nélkül:

$$t = A_1C_1 \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2}[(A_1C_1 + B_1D_1)^2 - (A_1C_1^2 + B_1D_1^2)] =$$
$$= \frac{s^2}{2} - 2\left[\left(\frac{A_1C_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{B_1D_1}{2}\right)^2\right] = \frac{s^2}{2} - 2 \cdot A_1B_1^2 = \frac{1}{2}(s^2 - e^2).$$

(Felhasználtuk, hogy N_1-nek O középpontja egy oldal végpontjaival derékszögű háromszöget alkot.)

t csak pozitív lehet, ennek feltétele nyilván $s > e$. Nem kellett felhasználnunk az ismert a, b oldalhosszúságokat. Ez korántsem jelenti, hogy eredményünk bármely s, e, a, b adatrendszer esetén megfelelő, csak ha N létrejön és konvexnek adódik.

Az ABC háromszög akkor és csak akkor jön létre, ha

(1) $$|a - b| < e < a + b.$$

N_1 átlóit g-vel és h-val jelölve a $g + h = s$, $\quad g^2 + h^2 = e^2$ egyenletrendszerből

$$g,\ h = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{2e^2 - s^2}).$$

Ezek valósak, ha $e \geq s/\sqrt{2}$, vagyis a fentivel összekapcsolva

(2) $$s/\sqrt{2} \leq e < s.$$

Ha g és h különbözők, akkor O helyzete kétféleképpen szerkeszthető, ti. g és h felcserélésével. Ezután C_1 az A_1 tükörképe O-ra, végül D a C tükörképe C_1-re. N akkor és csak akkor konvex, ha D az ABC szögtartományban adódik.

Berkes Zoltán (Budapest, Bolyai J. g. I. o. t.)
dolgozatából, kiegészítésekkel.

Megjegyzés. Átdarabolással kapjuk, hogy az ábra $FGHJ$ paralelogrammája egyenlő területű N-nel, másrészt kétszer akkora területű, mint N_1.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)