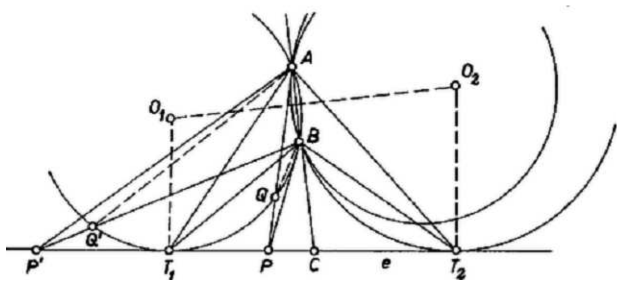
Legyen az adott egyenes e, a két adott pont A és B, az AB metszéspontja e-vel – ha nem párhuzamosak – legyen C, és ez esetben válasszuk a betűzést úgy, hogy B feküdjön A és C között. Az AB szakasz látószöge C-ből $0°$, az e egyenes minden más P pontjából ennél nagyobb. A P-ből vett látószög egyben az ABP háromszög köré írt kör P-t nem tartalmazó AB ívén nyugvó kerületi szög is. Ez az ív a kör sugarának csökkenésével növekszik, így várható, hogy egy az A-n és B-n átmenő, e-t érintő kör érintési pontjára lesz a legnagyobb.



A-n és B-n át két e-t érintő kör húzható, kivéve, ha AB párhuzamos e-vel. Ha T ezek valamelyikének az érintési pontja e-n, akkor a kör C-ből húzott szelőjére és érintőjére fennáll $CT^2 = CA \cdot CB$. Ez az érték A-val és B-vel egyértelműen meg van határozva, így a két érintési pontot a C körül $\sqrt{CA \cdot CB}$ sugárral rajzolt kör metszi ki e-ből.

Megmutatjuk, hogy a CT_1 félegyenes minden C-től és T_1-től különböző P pontjából kisebb szög alatt látszik AB, mint T_1-ből. Ha P a CT_1 szakaszon van, akkor a CAT_1 szögtartományban fekszik, a körön kívül, így az AP szakasz metszi a kör A-t nem tartalmazó T_1B ívét egy Q pontban. A BPQ háromszög belső és küső szögére

$$APB\sphericalangle = QPB\sphericalangle < AQB\sphericalangle = AT_1B\sphericalangle.$$

Ha P' a T_1-en túli meghosszabbításon van, akkor az ABT_1 szögtartományban és a körön kívül van, így a $P'B$ szakasz metszi a B-t nem tartalmazó AT_1 ívet egy Q' pontban, és az $AP'Q'$ háromszögből

$$AP'B\sphericalangle = AP'Q'\sphericalangle < AQ'B\sphericalangle = AT_1B\sphericalangle.$$

A CT_1 félegyenesen tehát a T_1 pontból legnagyobb a látószög, és ugyanígy a CT_2 félegyenesen a T_2 pontból. Hasonlóan látható, hogy ha $AB \parallel e$, akkor e minden más pontjából kisebb AB látószöge, mint a T érintési pontból. (Ennek részletezését az olvasóra bízzuk.)

Ha $AB \perp e$, akkor a két érintő kör egymás tükörképe AB-re, így T_1-ből is, T_2-ből is a látószög a lehető legnagyobb.

Ha pl. ACT_1 hegyes szög, akkor AB felező merőlegesének a T_1-ben e-re emelt merőlegessel való O_1 metszéspontja közelebb van e-hez, mint a T_2-ben emelt merőlegessel való O_2 metszéspontja. Így a T_1-ben érintő kör sugara, O_1T_1, kisebb, mint a T_2-ben érintő kör O_2T_2 sugara. Ebből következik, hogy az előbbi kör T_1-et tartalmazó AB ívének az AB egyenesre vonatkozó tükörképe annak a tartománynak a belsejében lesz, amit az AB szakasz és a T_2-ben érintő kör T_2-t tartalmazó AB íve határol. Ekkor azonban az előbbi körívről, s így T_1-ből is nagyobb szögben látszik AB, mint az utóbbiról, tehát nagyobb szögben, mint T_2-ből. Ebben az esetben tehát T_1 a keresett pont. Ha AB párhuzamos e-vel, akkor, mint említettük, az A-n és B-n átmenő és e-t érintő (egyetlen) kör érintési pontjából látszik legnagyobb szög alatt AB.

Berkes Zoltán (Budapest, Bolyai J. g. I. o. t.)