I. Legyen a kérdéses aránypár

$$x : y = z : v, \qquad \text{azaz} \qquad (1) xv = yz,$$

így az adatok szerint fennállanak a következő további egyenletek:

$$(2) \qquad x + v = y + z + a,$$

$$(3) \qquad x^2 + v^2 = y^2 + z^2 + b,$$

$$(4) \qquad x^4 + v^4 = y^4 + z^4 + c.$$

Emeljük négyzetre a (2) egyenletet, és vonjuk ki a kapott egyenletből (1) kétszeresét, valamint (3)-at

$$0 = 2a\,(y + z) + a^2 - b.$$

Emeljük négyzetre (3)-at, és vonjuk ki belőle (1) négyzetének kétszeresét, valamint (4)-et

$$0 = 2b\,(y^2 + z^2) + b^2 - c.$$

Így könnyen megoldható típusú kétismeretlenes egyenletrendszert kaptunk a két belső tagra. A jobb oldalakat egy–egy betűvel jelölve

$$(5) \qquad y + z = \frac{b - a^2}{2a} = d,$$

$$(6) \qquad y^2 + z^2 = \frac{c - b^2}{2b} = e,$$

feltéve, hogy $a \neq 0$, és $b \neq 0$, egyelőre erre az esetre szorítkozunk. Vonjuk ki (5) négyzetéből (6)-ot; osztással

$$(7) \qquad yz = \frac{d^2 - e}{2} = f.$$

(5) és (7) alapján y és z a következő egyenlet gyökei:

$$u^2 - du + f = 0, \qquad \text{azaz}$$

$$(8) \qquad y,\, z = u_{1,2} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 - 4f}).$$

Az előzők felhasználásával x és v így határozható meg:
(5) és (2) alapján

$$x + v = d + a = \frac{b + a^2}{2a} = g,$$

másrészt (1) és (7) alapján

$$xv = f,$$

ennélfogva (8)-hoz hasonlóan

$$(9) \qquad x,\, v = \frac{1}{2}(g \pm \sqrt{g^2 - 4f}).$$

(8) eredményünk úgy értendő, hogy az u-ra vonatkozó egyenlet egyik gyökét y-nak, másikát z-nek vesszük. A megválasztás kétféleképpen lehetséges, nem kapunk azonban lényegesen különböző megoldást y és z felcserélésével, hiszen eljárásunk csupán az aránypár ismert felcserélési lehetőségeinek alkalmazását jelentené. Ugyanezek állnak (9)-re is; x és v megválasztása független y és z megválasztásától, így általában 4 nem lényegesen különböző megoldása van az (1)–(4) egyenletrendszernek.

Az eredeti paraméterekkel kifejezve a két diszkrimináns:

$$D_1 = d^2 - 4f = 2e - d^2 = \frac{c}{b} - b - \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2,$$

$$D_2 = g^2 - 4f = (d + a)^2 - 4f = 2e - d^2 + b = D_1 + b,$$

ennélfogva

$$y,\, z = \frac{1}{2}\left(\frac{b - a^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{b} - b - \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2}\right),$$

$$x,\, v = \frac{1}{2}\left(\frac{b + a^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{b} - \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2}\right).$$

y és z, ill. x és v valósak, ha $D_1 \geqslant 0$, ill. $D_2 \geqslant 0$. Ha D_l, vagy D_2 0-val egyenlő, és a másikuk pozitív, akkor a két belső, ill. a két külső tag egyenlő és mértani középarányos a további két tag között. $D_1 = D_2 = 0$ a fentiek szerint csak $b = 0$ esetén lenne lehetséges, ezt az esetet eddigi számításunkban kizártuk.

A kizárt $a = 0$ esetben (1)-ből és (2)-ból adódik, hogy az x, v számpár tagjai valamelyik sorrendben megegyeznek y-nal, z-vel, így (3) és (4) csak $b = 0$, ill. $c = 0$ mellett állhat fenn, a paraméterek nem függetlenek egymástól.

$b = 0$ esetén hasonlóan adódik $c = 0$ (itt (1) négyzetét használjuk), viszont (3)-hoz (1) kétszeresét hozzáadva

$$(x+v)^2 = (y+z)^2, \qquad x+v = \pm(y+z),$$

tehát vagy $a = 0$, vagy $a = 2(x+v)$. (Fordítva $c = 0$-ból hasonlóan adódik $b = 0$, a másik eset – ti. $x^2+v^2 = -(y^2+z^2)$ lehetetlen.)

II. Az $a = 7$, $b = 21$, $c = 2625$ paraméter–hármas esetében $d = -2$, $e = 52$, $f = -24$, $g = 5$, $D_1 = 10^2$, $D_2 = 11^2$, így y és z egyike -6, másika 4, továbbá x és v egyike -3, másika 8. A 4 aránypár egyike:

$$(-3) : (-6) = 4 : 8.$$

Szalay Mihály (Budapest, Vörösmarty M. g., III. o. t.)