I. megoldás. Alakítsuk az (1) kifejezést az alábbiak szerint:

$$(a^2-2ab+b^2)+(c^2-2cd+d^2)+3(ab+cd)+$$
$$+(ac+bd)+(ad+bc)=(a-b)^2+(c-d)^2+$$
$$+3\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(ad+\frac{1}{ad}\right).$$

Az utolsó három zárójelben felhasználtuk, hogy a feltevés szerint $abcd=1$, így a második tag mindig az elsőnek a reciprokával helyettesíthető.

Az utolsó három zárójeles kifejezés mindegyike $e+1/e$ alakú, ahol e pozitív szám. Megmutatjuk, hogy egy pozitív számhoz az ilyen összeg értéke legalább 2. Valóban

$$e+\frac{1}{e}-2=\frac{e^2-2e+1}{e}=\frac{(e-1)^2}{e}\geq 0,$$

ha $e>0$, és egyenlőség csak az $e=1$ esetben áll fenn. Ebből az állítás következik, hiszen így az utolsó három tag összege legalább $6+2+2=10$, az első két tag pedig nem negatív.

Ha $a=b$, $c=d$, $ab=ac=ad=1$, akkor mindenütt egyenlőség áll, S értéke pedig 10, más esetben a „$>$” jel érvényes. A feltételekből $a^2=1$, és $a>0$ folytán $a=1=b=c=d$.

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

II. megoldás. Ha az a, b, c, d számok nem mindegyike 1, akkor van köztük 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb. Mivel a négy számot bármilyen más sorrendben véve S-ben csak a tagok sorrendje változik meg, S értéke nem, így feltehetjük, hogy

$$a>1>b. \tag{2}$$

Változtassuk a számainkat úgy, hogy szorzatuk ne változzék, de a helyett $a'=1$-et írunk. Legyen $b'=ab$, $c'=c$, $d'=d$. Ekkor

$$S'=1^2+(ab)^2+c^2+d^2+1\cdot ab+1\cdot c+1\cdot d+ab\cdot c+ab\cdot d+cd.$$

Ezt S-ből levonva

$$S-S'=a^2+b^2-1-a^2b^2+ac+ad+bc+bd-c-d-abc-abd=$$
$$=(a^2-1)(1-b^2)+(c+d)(a+b-1-ab)=$$
$$=(a-1)(1-b)\big[(a+1)(1+b)+c+d\big].$$

Itt az első két tényező a (2) feltétel folytán, a harmadik pedig számaink pozitív volta miatt pozitív, tehát pozitív a különbség is, azaz $S>S'$.

Ha az a', b', c', d' számok közt van különböző, akkor az eljárást ismételhetjük. Véges sok (legfeljebb 3) lépés után S^* értékhez jutunk, amelyben $a^*=b^*=c^*=d^*=1$, $S^*=10$. Így $S\geq S^*=10$, és egyenlőség csak akkor áll, ha $a=b=c=d=1$.

Major Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

III. megoldás. Megoldásunkat arra alapítjuk, hogy négy pozitív szám számtani közepe, $(a+b+c+d)/4$ nem kisebb mértani középüknél, $\sqrt[4]{abcd}$-nél. Ezt a megoldás végén igazoljuk. Esetünkben ez a következő egyenlőtlenséget adja:

$$a+b+c+d\geq 4.$$

Ezt négyzetre emelve, majd 2-vel osztva

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geq 8. \tag{4}$$

Alkalmazzuk a szóban forgó egyenlőtlenséget a bal oldal első négy tagjára, és vegyük figyelembe a feltevést:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}\right)\geq\sqrt[4]{\frac{a^2b^2c^2d^2}{16}}=\frac{1}{2}\sqrt{abcd}=\frac{1}{2}.$$

Ennek 4-szeresét (4)-hez hozzáadva a bizonyítandó állítást kapjuk: $S\geq 10$.

A felhasznált egyenlőtlenséget a két pozitív számra vonatkozó megfelelő $(u+v)/2\geq\sqrt{uv}$ egyenlőtlenségből könnyen kaphatjuk (ami helyes, mert $(u+v)/2-\sqrt{uv}=(u+v-2\sqrt{uv})/2=(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2/2\geq 0$). Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget az $(a+b+c+d)/4$ kifejezésben előbb külön–külön az a, b és a c, d számpárra, majd a $\sqrt{ab}$, $\sqrt{cd}$ számpárra. Így

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\geq\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geq\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd},$$

és ezt akartuk igazolni.

Bod Judit (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. G. I. o. t.)

Megjegyzés. Akárhány pozitív számra is fennáll a fentihez hasonló egyenlőtlenség[1]

$$\frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} \geq \sqrt[n]{c_1 c_2 \ldots c_n}.$$

Ezt alkalmazva az S összeg 10 tagjára, azt kapjuk, hogy

$$\frac{S}{10} \geq \sqrt[10]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd} = \sqrt[10]{a^5 b^5 c^5 d^5} = 1,$$

vagyis $S \geq 10$, és ezt kellett bizonyítani.

Balogh Kálmán (Budapest, Fazekas M. Gyak. G., I. o. t.)

[1]Lásd pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai Versenytételek I. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1955) 111. o.