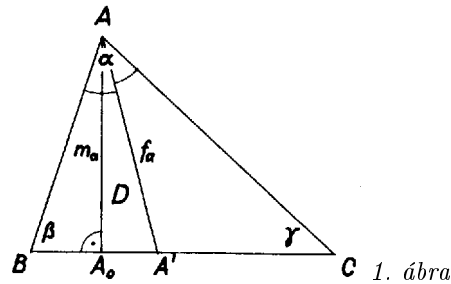


**I. megoldás.** Legyen a kívánt háromszög  $ABC$ , ebben a  $BC = a$  oldal, valamint az  $A$  csúsból húzott  $AA' = f_a$  szögfelező és  $AA_0 = m_a$  magasság rendre egyenlő az adott három hosszúsággal. Legyen továbbá az  $A, B, C$  csúcsnál levő szög rendre  $\alpha, \beta, \gamma$ .



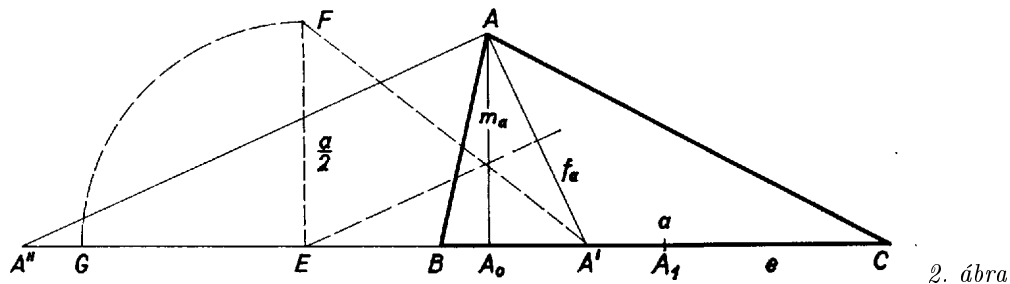
Egyelőre feltesszük, hogy  $f_a > m_a$ . Így az  $AA'A_0 = D$  derékszögű háromszögnek három független alkatrészét ismerjük. Szögeit kifejezhetjük az  $ABC\Delta$  szögeivel. A feltevés miatt az  $AB$  és  $AC$  oldalak hossza különböző, válasszuk a jelölést úgy, hogy  $AB < AC$ , így  $\gamma < \beta$ . Ekkor  $A'$  az  $A_0C$  szakaszon van, és  $AA'A_0\angle = \gamma + \alpha/2 = [180^\circ - (\beta - \gamma)]/2$ , mint az  $AA'C\Delta$  külső szöge, továbbá

$$AA_0\angle = 90^\circ - AA'A_0\angle = \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Eszerint  $D$  megszerkesztésével ismertté vált az  $a$  oldal végpontjainál levő szögek különbsége, ill. a kiegészítő szögének a fele, és ezzel az észrevétellel feladatunkat visszavezettük az 1964. évi Arany Dániel kezdők versenye II. fordulójának 2. feladatára<sup>1</sup> ahol éppen a szóban forgó különbség került felhasználásra. – Mint láttuk, a feladatnak mindig van megoldása és pedig lényegében egy.

$f_a = m_a$  esetén az  $ABCD\Delta$  szükségképpen egyenlő szárú, a szerkesztés alapfeladatnak tekinthető;  $f_a < m_a$  esetén pedig nincs megoldás.

Varsányi Anikó (Budapest, Ságvári E. gyak. g. I. o. t.)



**II. megoldás.** Állítsunk merőlegest az I. megoldásbeli  $AA'$  szögfelezőre  $A$ -ban, messe ez az  $A'A_0$  egyenest  $A''$ -ben.  $AA''$  az  $ABC\Delta$   $A$ -nál levő külső szögének felezője,  $A''$  a  $BC$  oldal  $B$ -n túli meghosszabbításán adódik. Ismeretes, hogy a belső szögfelező  $A'$  talppontja  $B$ -től és  $C$ -től mért távolságainak aránya egyenlő az  $AB : AC$  aránnyal, és hasonlóan belátható, hogy a tétel  $A''$ -re is igaz. Így

$$(1) \quad \frac{BA'}{CA'} = \frac{BA}{CA} = \frac{BA''}{CA''}, \quad BA' \cdot CA'' = BA'' \cdot CA'.$$

Ennek alapján kiszámíthatjuk és megszerkeszthetjük a  $BA' = x$  szakaszt. Ugyanis  $CA' = a - x$ ,  $BA'' = A'A'' - x$ ,  $CA'' = CB + BA'' = a + A'A'' - x$ , és itt  $A'A''$  kifejezhető az adatokkal: szerkesztésünk folytán az  $A'A''A$  és  $A'AA_0$  derékszögű háromszögekből

$$A'A'' = d = \frac{A'A^2}{A'A_0} = \frac{f_a^2}{\sqrt{f_a^2 - m_a^2}}.$$

Mіндеzeket (1)-be helyettesítve a szokásos rendezési lépésekkel

$$x^2 - (a + d)x + ad/2 = 0,$$

$$x = x_1 = \frac{1}{2}(a + d - \sqrt{a^2 + d^2}) = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2},$$

<sup>1</sup>A megoldást lásd K.M. L. 30 (1965) 2 - 3. o.,

ugyanis az egyenlet  $a$ -nál kisebb gyökére van szükségünk. ( $x_2$  a  $CA''$  szakasz hosszát adja, ugyanis a gyökök összege  $a + d$ , és így  $x_2 = a + (d - x_1) = CB + BA'' = CA''$ .)

A fentiekből a következő szerkesztés adódik. Egy  $e$  egyenes  $A_0$  pontjában állított merőlegesre felmérjük az adott  $m_a$  magasságot, a végpont  $A$ : körívet írunk  $A$  körül a szögfelező  $f_a$  hosszával, mint sugárral, ennek  $e$ -vel való egyik metszéspontja  $A'$ . Megszerkesztjük  $AA'$  felező merőlegesét, ennek  $e$ -vel való metszéspontja  $E$ . Itt merőlegest állítunk  $e$ -re és rámérjük az adott  $a$  oldal felét, úgyszintén  $A'E$ -nek  $E$ -n túli meghosszabbítására is, a végpont  $F$ , ill.  $G$ . Az  $A'F$  szakaszt  $G$ -ből  $E$  felé felmérve kapjuk  $B$ -t, és innen tovább  $a$ -t felmérve  $C$ -t.

Hely hiányában az olvasóra bízunk a szerkesztés helyességének bizonyítását, – ami csupán annak megmutatásában áll, hogy  $AA'$  felezi a  $BAC$  szöveget –, továbbá azért, hogy  $f_a > m_a$  esetén mindig egy megoldás van.

*Szentiványi Béla* (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Az  $A'$  és  $A''$  pontok  $B$ -től mért távolsága az osztásarányra idézett tételek alapján kifejezhető az oldalakkal:  $A'B = ac/(b+c)$ ,  $A''B = ac/(b-c)$ . Ezekkel kifejezhetjük a  $BC$  oldal  $A_1$  felezőpontjától mért  $A'A_1A''A_1$  távolságokat is:  $A'A_1 = A_1B - A'B = a(b-c)/(2(b+c))$ ,  $A''A_1 = A''B + BA_1 = a(b+c)/(2(b-c))$ , ebből az  $A_1A' \cdot A_1A'' = BC^2/4$  összefüggés adódik. Ennek alapján  $A_1$  helyzetét határozhatjuk meg  $A'$ -höz és  $A''$ -höz képest a fenti eljáráshoz hasonlóan.

*Bóta Károly* (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)