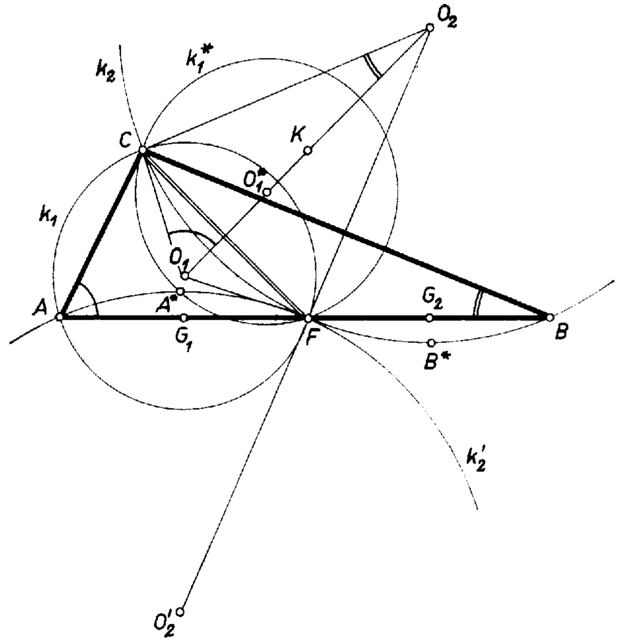
Legyen a kérdéses háromszög ABC, amelyben az AB oldalhoz tartozó CF súlyvonal egyenlő az adott s_c szakasszal, az ACF és BCF háromszög köré írt k_1, ill. k_2 kör sugara pedig az adott r_1, ill. r_2 szakasszal.

C, F és a körök O_1, ill. O_2 középpontja egy deltoidot alkotnak, mert $CO_1 = FO_1 = r_1$, és $CO_2 = FO_2 = r_2$, ez a három adott szakaszból megszerkeszthető. Ez után olyan egyenest kell szerkesztenünk F-en át, melynek a k_1-gyel és k_2-vel való, és F-től különböző metszéspontjai közti szakaszt az F pont felezi, e két metszéspont lesz az A, ill. B csúcs. Ez ismert szerkesztés: vesszük k_2-nek F-re vonatkozó k_2' tükörképét, ennek k_1-gyel való (F-től különböző) metszéspontja A, B-t pedig az AF egyenes metszi ki k_2-ből. Az ABC háromszög nyilvánvalóan megfelel a követelményeknek.



A CO_1FO_2 deltoid létrejön, ha $r_1 \geq s_c/2$, $r_2 > s_c/2$. (A jelölést úgy választottuk, hogy $r_1 \leq r_2$.) Így O_1 eshet CF-re, de O_2 nem, különben a két kör azonos lenne, holott pl. k_1 nem mehet át B-n; $r_1 = s_c/2$ esetén a háromszögben A-nál derékszög van. Ha a deltoid – ill. elfajulás esetén a CFO_2 háromszög – létrejött, akkor a szerkesztés mindig befejezhető, A (és B) létrejön, mert k_1-nek és k_2'-nek egy közös pontja F, és a második metszéspont ettől különböző – a két kör nem érintkezhet –, $O_2'F$ nem mehet át O_1-en, mert az O_1O_2 egyenestől különböző, és közös pontjuk O_2.

A feladatnak általában 2 különböző háromszög felel meg aszerint, hogy O_1-et és O_2-t a CF-nek ugyanegy partján választjuk (ekkor a deltoid konkáv), vagy a két partján (az előbbi esetben pl. k_1 helyett CF-re vonatkozó k_1^* tükörképét használjuk). $r_1 = r_2$ esetén azonban csak az utóbbi megválasztás ad háromszöget, 1 megoldás van, úgyszintén $r_1 = s_c/2 < r_2$ esetén is.

Lelkes András (Pannonhalma, Benedek-rendi g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A deltoid előállítása után a szerkesztést így is befejezhetjük. Legyen az AF, FB, O_1O_2 szakasz felezőpontja rendre G_1, G_2, ill. K. Az $O_1G_1G_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz (lehet hurkolt is, vagy elfajulhat derékszögű háromszöggé), és benne a KF szakasz középvonal, tehát merőleges G_1G_2-re. Ennek alapján az AB egyenest megadja az F-en átmenő és a KF-re merőleges egyenes.

2. Az O_1O_2C háromszögben $CO_1O_2\sphericalangle = CO_1F\sphericalangle/2 = CAF\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ (akkor is, ha tompaszög, ebben az esetben $CO_1F > 180°$), és ugyanígy $CO_2O_1\sphericalangle = CBA\sphericalangle$. Így az O_1O_2C háromszög hasonló a keresett ABC háromszöghöz (a csúcsok a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak). Eszerint a deltoid előállítása után a szerkesztés befejezhető hasonlósági transzformációval is.

3. Ajánljuk az olvasóknak az utóbbi két megoldás-vázlatban a szerkesztés helyessége bizonyításának végrehajtását.