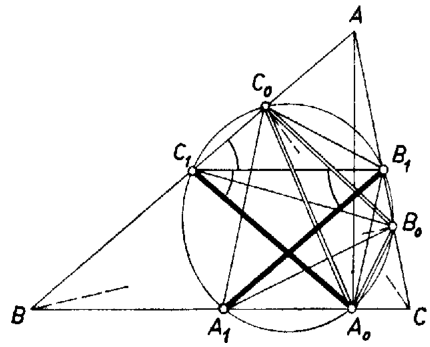
Megmutatjuk, hogy a kérdéses egyenlőség hegyesszögű és derékszögű háromszögben igaz, tompaszögű háromszögben nem igaz.



1. ábra

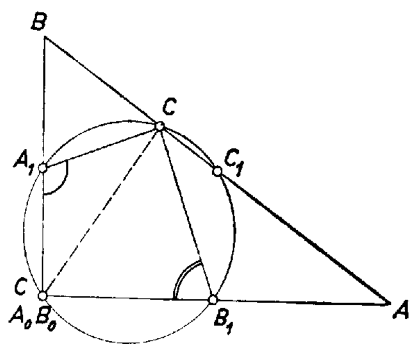
Először belátjuk, hogy minden háromszögben az $A_1B_1C_1$ háromszög – az ún. középháromszög – csúcsai és A_0 egy szimmetrikus trapéz csúcsai, ha $A_0 \neq A_1$. B_1C_1 a háromszög BC-vel párhuzamos középvonala (1. ábra), így párhuzamos A_0A_1-gyel, tehát merőleges AA_0-ra és felezi, más szóval A_0 az A tükörképe B_1C_1-re. Továbbá A_1B_1 az AB oldallal párhuzamos középvonal, így $A_1B_1 = AB/2 = C_1A = C_1A_0$, és $A_1B_1C_1\sphericalangle = B_1C_1A\sphericalangle = B_1C_1A_0\sphericalangle$; ezekből következik, hogy A_0, A_1, B_1, C_1 valóban egy szimmetrikus trapéz csúcsai, ha pedig $A_0 = A_1$, akkor egyenlő szárú háromszögéi.

Eszerint az $A_0A_1B_1C_1$ trapéz köré kör írható, más szóval a középháromszög köré írt kör átmegy az AA_0 magasság talppontján. Megállapításunk további két magasság talppontjára is érvényes, eszerint a három magasság talppont rajta van a középháromszög köré írt k kör kerületén. [1]

Ha az ABC háromszög hegyesszögű, (1) első szögére $B_0A_1C_0\sphericalangle = B_0A_0C_0\sphericalangle$, mert k-nak ugyanazon ívén, a C_1-et tartalmazó B_0C_0 ívén nyugvó kerületi szögek. Hasonló meggondolásokkal (1) bal oldala így alakítható:

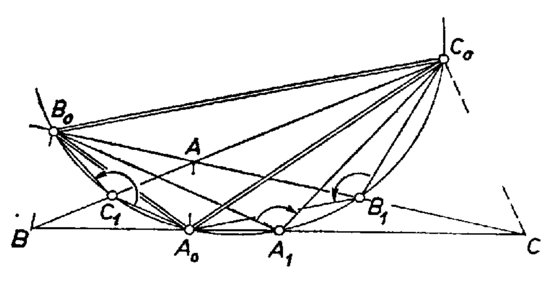
$$B_0A_0C_0\sphericalangle + C_0B_0A_0\sphericalangle + A_0C_0B_0\sphericalangle,$$

ez pedig az $A_0B_0C_0$ talpponti háromszög szögeinek összege, ami $180°$, így (1) valóban igaz.



2. ábra

Ha az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van (2. ábra), akkor ide esik A_0 és B_0, így (1) bal oldalának utolsó szöge 0. Másrészt k átmegy C-n. Az első két szög a körbeírt $A_1CB_1C_0$ négyszög belső szöge az egymással szemben fekvő A_1, ill. B_1 csúcsnál, így összegük $180°$, tehát (1) igaz.



3. ábra

[1] Ezt a kört nevezik *Feuerbach*-féle körnek. Ez átmegy a magasságpont és csúcsok közti szakaszok felezőpontjain is. Középpontja a magasságpont és a körülírt kör középpontja közti szakasz felezőpontja.

Legyen most ABC tompaszögű háromszög (3. ábra, $BAC\sphericalangle < 90°$). A legnagyobb oldalon levő A_1 felezőpont és A_0 magasságtalppont ebben az esetben is a B_0C_0 egyenesnek ugyanazon a partján van, így (1) első szögére változatlanul fennáll $B_0A_1C_0\sphericalangle = B_0A_0C_0\sphericalangle$. Viszont az A_0C_0 egyenes szétválasztja a B_1, B_0 pontpárt, ezért (1) második szögére $C_0B_1A_0\sphericalangle = 180° - C_0B_0A_0\sphericalangle$, és ugyanígy a harmadikra $A_0C_1B_0\sphericalangle = 180° - A_0C_0B_0\sphericalangle$. Ezért (1) bal oldala így alakul:

$$
\begin{aligned}
&B_0A_0C_0\sphericalangle + 360° - (C_0B_0A_0\sphericalangle + A_0C_0B_0\sphericalangle) = \\
&= 180° + 2B_0A_0C_0\sphericalangle > 180°
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(ismét felhasználtuk a talpponti háromszög szögeinek összegét), tehát (1) valóban nem igaz.

Havas János (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Tompaszögű háromszögre is érvényes (1), ha minden benne fellépő szöget iránnyal ellátott, 180°-nál kisebb forgásszögnek tekintünk, pl. $B_0A_1C_0$ szögön azt a 180°-nál kisebb forgást értjük, amely az A_1B_0 félegyenest átviszi az A_1C_0 félegyenesbe (vagyis megkülönböztetjük a szög első és második szárát). Így a 3. ábrán a $B_0A_1C_0$ forgás negatív, az óramutató járásával megegyező irányú, minden más forgás pozitív.

Ha viszont – mint eddig tettük – a szögön a forgás abszolút értékét értjük, akkor a 3. ábra háromszögére (1) úgy érvényes, hogy az első tag elé mínusz jelet teszünk, – amint ez a (2) átalakításból nyilvánvaló.