

A $P(x) + 8$ polinomnak az $(x + 1)^3$ polinommal való oszthatósága azt jelenti, hogy létezik olyan polinom, melynek $(x + 1)^3$ -nel képezett szorzata azonos $P(x) + 8$ -cal, és pedig fokszáma egyenlő a két polinom fokszámának különbségével, $5 - 3 = 2$ -vel. Legyen ez a polinom $Ax^2 + Bx + C$, hasonlóan $P(x) - 8$ és $(x - 1)^3$ hányadosa a $Kx^2 + Lx + M$ polinom, ekkor az A, B, C és K, L, M együtthatókat úgy kell meghatároznunk, hogy a következő két polinom azonos legyen:

$$\begin{aligned}(x - 1)^3(Ax^2 + Bx + C) - 8 &= Ax^5 + (3A + B)x^4 + \\ &+ (3A + 3B + C)x^3 + (A + 3B + 3C)x^2 + (B + 3C)x + (C - 8), \text{ és} \\ (x - 1)^3(Kx^2 + Lx + M) + 8 &= Kx^5 - (3K - L)x^4 + \\ &+ (3K - 3L + M)x^3 - (K - 3L + 3M)x^2 - (L - 3M)x + (-M + 8).\end{aligned}$$

Két polinom akkor és csak akkor azonos, ha bennük az ugyanazon kitevős hatványok együtthatói egyenlők. Ebből a feltételből az ismeretlen A, B, C, K, L, M együtthatókra a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}(1) \quad & A = K, \\ (2) \quad & 3A + B = -3K + L, \\ (3) \quad & 3A + 3B + C = 3K - 3L + M, \\ (4) \quad & A + 3B + 3C = -K + 3L - 3M, \\ (5) \quad & B + 3C = -L + 3M, \\ (6) \quad & C - 8 = -M + 8.\end{aligned}$$

Ezeket, (1)-et is figyelembe véve, így rendezhetjük:

$$\begin{aligned}(2a) \quad & B - L = -6A, \\ (3a) \quad & 3(B + L) + (C - M) = 0, \\ (4a) \quad & 3(B - L) - 3(C + M) = -2A, \\ (5) \quad & (B + L) + 3(C - M) = 0, \\ (6) \quad & C + M = 16.\end{aligned}$$

(4a)-ból (2a), (6) és (1) felhasználásával $A = K = 3$, $B - L = 18$, (3a)-ból és (5)-ből pedig összeadással

$$B + L = -(C - M) = 0,$$

így

$$\begin{aligned}B = -9, \quad L = 9, \quad C = M = 8, \quad \text{végül} \\ P(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x.\end{aligned}$$

Jereb László (Sopron, Széchenyi I. g. Gimn., II. o. t.)