

I. megoldás. Bontsuk az egyenlőtlenség B bal oldalát tagokra:

$$B = 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + a^2b + b^2c + c^2a - 5ab^2 - 5bc^2 - 5ca^2.$$

Itt a helyébe b -t, b helyébe c -t, c helyébe a -t, vagy pedig a helyébe c -t, c helyébe b -t, b helyébe a -t írva B -ben csak a tagok cserélődnek meg, B értéke nem változik. Ennek következtében az egyik betűről kiköthetjük, hogy pl. a legkisebb vagy legnagyobb, vagy a középső számot jelentse a három közül. Ennek alapján megpróbáljuk B -t olyan kifejezések összegévé alakítani, amelyek egyike sem lehet negatív, szükség esetén felhasználva az éppen mondott lehetőséget is.

$$\begin{aligned} B &= 4a^3 - 4a^2c + 4b^3 - 4b^2a + 4c^3 - 4c^2b + \\ &\quad + a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 = \\ &= (a-c)(4a^2 - ac) + (b-a)(4b^2 - ab) + (c-b)(4c^2 - bc) = \\ &= 3a^2(a-c) + a(a-c)^2 + 3b^2(b-a) + b(b-a)^2 + \\ &\quad + 3c^2(c-b) + c(c-b)^2. \end{aligned}$$

Itt a második, negyedik és hatodik tag nem lehet negatív, az első, harmadik és ötödik tag H összegéből egy különbséget kiküszöbölhetünk, ha pl. $a-c$ helyett $(a-b) + (b-c)$ -t írunk:

$$\begin{aligned} H &= 3(a-b)(a^2 - b^2) + 3(b-c)(a^2 - c^2) = \\ &= 3(a-b)^2(a+b) + 3(a-c)(b-c)(a+c). \end{aligned}$$

Itt az első tag ismét nem lehet negatív, továbbá ha c nem nagyobb sem a -nál, sem b -nél, amit feltehetünk a fentiek szerint, akkor a második sem negatív. Ezzel beláttuk, hogy B nem lehet negatív, nulla is csak akkor, ha $a-b = b-c = c-a = 0$, azaz $a = b = c$.

Kafka Péter (Pannonhalma, Benedek-rendi Gimn. I. o. t.) és
Pintér János (Budapest, I. István G. II. o. t.)
dolgozatából, kiegészítésekkel

II. megoldás. Kézenfekvő gondolat megpróbálni az egyenlőtlenség B bal oldalát $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ egy-egy pozitív értékkel szorzott értékei összegeként előállítani. Megpróbáljuk ezeket a szorzókat egyrészt a , b , c -ben első fokúnak választani, másrészt a különbségben nem szereplő betű együttthatóját 0-nak választjuk, miután B -ben nem szerepel mindhárom betűt tartalmazó tag, amint az előbbi megoldásban láttuk; végül azt is várjuk a szorzóktól, hogy a helyett b -t, b helyett c -t, c helyett a -t írva egymásba menjenek át, ugyanúgy, mint a szóban forgó különbségek, miután ez a felcserélés B -t sem változtatja meg, csak tagjait cseréli meg. Ha tehát van olyan u és v , amelyre

$$B = (a-b)^2(au + bv) + (b-c)^2(bu + cv) + (c-a)^2(cu + av),$$

és ezek pozitívnak adódnak, akkor a feladat állítását bebizonyítottuk.

A jobb oldalon a köbös tagok együttthatója $u + v$, az a^2b , b^2c , c^2a tagoké $v - 2u$, az ab^2 , bc^2 , ca^2 tagoké $u - 2v$, tehát

$$u + v = 4, \quad v - 2u = 1, \quad u - 2v = -5$$

kell, hogy teljesüljön. Az egyenletrendszernek van megoldása: $u = 1$, $v = 3$, így a következőt nyertük:

$$\begin{aligned} B &= 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + a^2b + b^2c + c^2a - 5ab^2 - 5bc^2 - 5ca^2 = \\ &= (a-b)^2(a+3b) + (b-c)^2(b+3c) + (c-a)^2(c+3a) \geq 0. \end{aligned}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a-b = b-c = c-a = 0$, azaz $a = b = c$.