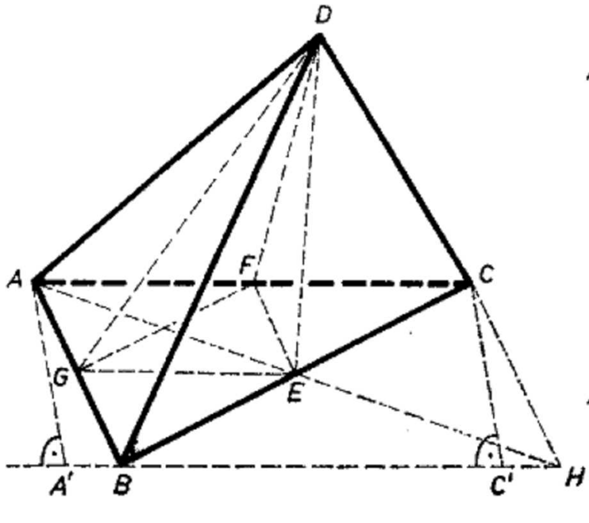
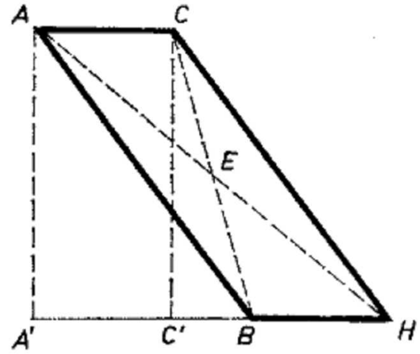
A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán AE, BF és CG az ABC alaplap súlyvonalai, a jobb oldalon DE, DF és DG az oldallap-háromszögeknek a D főcsúcsból kiinduló súlyvonalai.





A háromszög súlyvonalai kifejezhetők az oldalakkal. Válasszuk a betűzést úgy, hogy BAC hegyesszög legyen, tükrözzük A-t E-re, legyen a tükörkép H, végül legyen A és C vetülete a BH egyenesen A', C'. Így az $ABHC$ négyszög paralelogramma, $AE = AH/2$, és Pythagorász tételét alkalmazva egymás után az AHA', CBC', ABA' és CHC' derékszögű háromszögekre, valamint figyelembe véve az

$$A'H = A'B + BH, \qquad C'B = |BH - C'H|, \qquad A'B = C'H,$$
$$BH = AC \qquad \text{és} \qquad CH = AB$$

egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} AH^2 + BC^2 &= AA'^2 + A'H^2 + C'B^2 + CC'^2 = AA'^2 + A'B^2 + \\ &+ 2A'B \cdot BH + BH^2 + C'H^2 - 2C'H \cdot BH + BH^2 + CC'^2 = \\ &= AB^2 + BH^2 + HC^2 + CA^2 = 2AB^2 + 2AC^2, \end{aligned} \tag{2}$$

és így

$$AE^2 = \frac{AH^2}{4} = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2). \tag{3}$$

Hasonló meggondolással ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a BAC szög tompaszög, vagy ha derékszög; eszerint a háromszög egy súlyvonalának négyzete egyenlő a súlyvonallal közös végpontú oldalak négyzetösszege 2-szereséből, valamint a szemben fekvő oldal négyzetéből képezett különbség 4-ed részével.

Ezek szerint előbb az (1) bal oldalán, majd a jobb oldalán szereplő súlyvonalak négyzetösszege

$$AE^2 + BF^2 + CG^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2), \tag{4}$$

$$DE^2 + DF^2 + DG^2 = DA^2 + DB^2 + DC^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2). \tag{5}$$

(1) jobb oldalán EF, FG, GE az ABC alapháromszög középvonalai, rendre egyenlők a háromszög oldalainak felével, így négyzetösszegük 4-szerese egyenlő az ABC háromszög oldalainak négyzetösszegével. Ezt (4) és (5) eredményeinkkel egybevetve kapjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőség fennáll, mert két oldalának közös értéke:

$$(DA^2 + DB^2 + DC^2) + \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Gy. Molnár Csaba (Miskolc, Bláthy O. vill. ip. t. I. o. t.)

Megjegyzés. A (2) eredmény szerint paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.