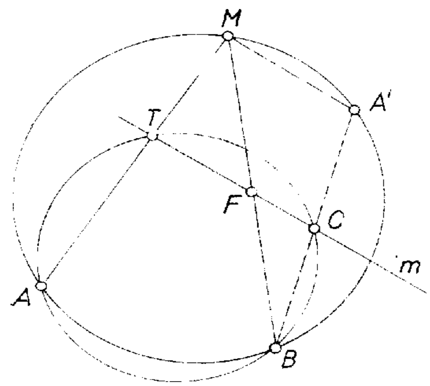
I. megoldás. I. Legyen a BM húr felezőpontja F, továbbá AM és az F-en át rá merőlegesen állított m egyenes metszéspontja T. Állítsunk merőlegest AM-re M-ben, jelöljük a körrel való, M-től különböző metszéspontját A'-vel, továbbá rajzoljuk meg az $A'B$ egyenest, és legyen ennek m-mel közös pontja C.



1. ábra

FC az $MA'B$ háromszög középvonala, mert szerkesztésénél fogva párhuzamos MA'-vel, F pedig felezi az MB oldalt. Ennélfogva C az $A'B$ oldal felezőpontja. – Másrészt Thalész tételének megfordítása alapján A' a körnek A-val átellenes pontja, tehát M mozgása közben állandó, ezért állandó az $A'B$ húr C felezőpontjának helyzete is. Eszerint m az M mozgása közben C körül forog. Ezt kellett bizonyítanunk.

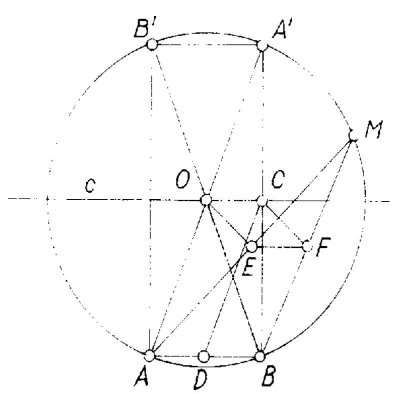
Akkor is igaz az állítás, ha M egybeesik A'-vel vagy B-vel, mert $M = A'$ esetén $F = C$, ha pedig $M = B$, akkor a 0 hosszúságú BM húr felezőpontjaként csak magát B-t tekinthetjük, és így m azonos BA'-vel, hiszen az AB-re B-ben állított merőleges ugyancsak A'-ben metszi a kört. Amikor M az A ponton halad át, az MA egyenes iránya határozatlan, ezért szigorúan véve m nem szerkeszthető meg. Tekintetbe véve azonban M mozgásának folytonosságát, AM irányaként csak az A-beli érintő iránya vehető, így fenti meggondolásunk érvényes marad.

Ha $A' = B$, vagyis A és B a kör átellenes pontjai voltak, akkor M minden helyzetében $MB \perp MA$, így $m = MB$, tehát m a B pont körül forog. (Ez adódik a fenti végeredményből is, ha az $A'B$ húr C felezőpontjának ismét magát B-t tekintjük; minthogy azonban ilyenkor nem beszélhetünk az $MA'B$ háromszögről és középvonaláról, külön meggondolást kellett végeznünk.) II. Az eddigiek szerint a vizsgálandó T pontból az állandó AC szakasz derékszögben látható, ezért T mindig az AC átmérő fölé írt t Thalész-körön van. Megmutatjuk, hogy e kör minden pontja fellép T-ként, míg M befutja az eredeti kört. Legyen t egy tetszés szerinti pontja T^*, ekkor M-nek a T^*-ot előállító helyzetét az eredeti kör és az AT^* egyenes második metszéspontja jelöli ki, $T^* = A$ esetén pedig a Thalész-kör A-beli érintője. Az M ponthoz a feladat szerint hozzárendelt T az $AM = AT^*$ egyenes olyan pontja, melyből az AC szakasz derékszögben látszik, vagyis AT^* és t közös pontja. Ezeknek legfeljebb két közös pontja van: A és T^*. Csak akkor adódhat T-ként A, ha CA merőleges AM-re, azaz AT^*-ra, vagyis ha AT^* érinti a t kört, így A és T^* azonosak, tehát T a T^*-gal is egybeesik. Minden más helyzetben A és T^* különböző pontok, ezért T a T^*-gal azonos. Eszerint T^* valóban hozzátartozik a mértani helyhez, a keresett mértani hely az AC átmérő fölötti Thalész-kör.

A fenti módon M mindig létrejön, mert AT^*-nak és az eredeti körnek van közös pontja: A; amikor T^* az eredeti körhöz A-ban húzott érintőn van, akkor M azonos A-val.

Az $A' = B$ helyzetben t azonos az eredeti körrel, minden más esetben a két kör A-ban és B-ben metszi egymást, ugyanis, mint láttuk, $A'B \perp AB$, tehát B a t-n is rajta van.

Ujvári István (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)
Lamm Péter (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)



2. ábra

II. megoldás *a feladat első részére.* Külön vizsgáljuk azt az esetet, ha M az A vagy B, vagy az átellenes A' vagy B' pontban van (2. ábra), majd külön a kör ezektől különböző M pontjait. Ha B'-vel esik egybe M, akkor MB

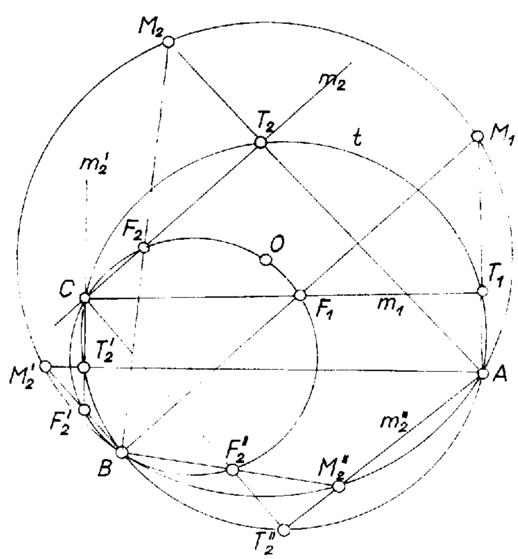
felezőpontja a kör O középpontja, másrészt MA merőleges AB-re, tehát a vizsgálandó merőleges az O-n átmenő, AB-vel párhuzamos c egyenes; az állításban szereplő állandó pont csak ezen lehet. – Legyen másodszor M az A' pontban. Az $ABA'B'$ négyszög téglalap, és ennek egyik szimmetriatengelye c, másrészt az $MB = A'B$ szakasz C felezőpontja rajta van c-n. A keresett állandó pont csak C lehet, mert a C-ből $MA = A'A$-ra állított merőleges különbözik c-től, hiszen $A'A$ hegyes szöget zár be a c-vel párhuzamos AB-vel. – C-n megy át a merőleges az $M = B$ esetben is, mert ekkor BM felezőpontja maga B, így MA azonos BA-val, a merőleges a BA' egyenes.

Amikor M az A-n halad át, az MA egyenes határozatlan. A vizsgálandó merőleges irányát azonban megadhattuk volna így is: párhuzamos az AM szakasz felezőpontját az O középponttal összekötő egyenessel. Így az $M = A$ helyzetben a merőleges átmegy AB-nek D felezőpontján és párhuzamos AO-val, tehát az ABA' háromszög AA'-vel párhuzamos középvonala, felezi BA'-t C-ben.

Legyen most már M a körnek A-tól, B-től, A'-től és B'-től különböző pontja. Megmutatjuk, hogy az MB húr F felezőpontján át MA-ra állított merőleges átmegy C-n. Ehhez elég azt megmutatni, hogy $CF \perp AM$, mert F-ből csak egy merőleges állítható AM-re, annak tehát egybe kell esnie CF-fel, ha állításunk igaz. A bizonyítandó állítás következik abból, ha megmutatjuk, hogy $COEF$ paralelogramma, mert ekkor $CF \parallel EO$, az utóbbi viszont az AM húr felező merőlegese. Mivel EF az ABM háromszög középvonala, OC pedig az ABA' háromszögé, így mindkettő párhuzamos AB-vel és feleakkora, tehát egymással is párhuzamosak és egyenlők; $COEF$ tehát valóban paralelogramma. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Hámori Márta (Győr, Kazinczy F. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Közel vezet a feladat állításának bebizonyításához a következő meggondolás is. Legyen a mozgó pont két tetszés szerinti helyzete M_1 és M_2, legyen $i = 1, 2$ esetén a BM_i húr felezőpontja F_i, ennek merőleges vetülete az AM_i egyenesen T_i, az F_iT_i az egyenes m_i, végül m_1 és m_2 metszéspontja C (ez létezik, mert AM_1 nem párhuzamos AM_2-vel, 3. ábra). – Az F_1CF_2 szög vagy egyenlő az M_1AM_2 szöggel, vagy annak kiegészítő szöge, mert száraik páronként merőlegesek egymásra. Az M_1BM_2 szög vagy egyenlő az M_1AM_2 szöggel, vagy annak kiegészítő szöge, mert az adott körben vagy ugyanazon M_1M_2 íven nyugvó kerületi szögek – ha ti. az M_1M_2 egyenes nem választja szét A-t és B-t –, szétválasztás esetén pedig A és B az AM_1BM_2 húrnégyszög szemben fekvő csúcsai. Így az $F_1CF_2\sphericalangle$ vagy egyenlő az $F_1BF_2\sphericalangle$-gel (mert az utóbbi azonos az $M_1BM_2\sphericalangle$-gel), vagy annak kiegészítő szöge, vagyis az F_1F_2 szakasz C-ből vett látószöge egyenlő a B-ből vett látószögével, vagy kiegészítő szögek.



3. ábra

Mármost F_1 és F_2 rajta van az OB átmérőjű k' Thalész-körön, ezért C vagy a k'-n van, vagy annak az F_1F_2 egyenesre való tükörképén. Feltéve, hogy az első eset áll fenn, rögzítsük M_1-et, és fussa be M_2 az adott kört. A fentiek szerint m_2 ugyanott metszi k'-t, mint m_1, vagyis C-ben, eszerint amíg M_1 nem változik, C állandó pont. Másrészt F_2 körülfut k'-n, tehát m_2 teljesen körülfordul C körül. Eszerint – ha egyáltalán van állandó pont – az csak C lehet.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy C helyzete független M_1 megválasztásától, továbbá hogy C nem lehet k'-nek F_1F_2-re való tükörképén.