Az adott kifejezések egyszerűen tevődnek össze a

$$pq+p+2=A, \qquad pq-2q=B$$

kifejezésekből. Valóban, így az (1) alatti négyes: 1, $A-p$, $B+p$, $A+B-1$, a (2) alatti pedig: 2, $A-1$, $B+1$, $A+B-2$. Képezzük így az (1), ill. a (2) kifejezések négyzetösszegének D_2 különbségét, mindjárt egy-egy zárójelbe foglalva az ugyanazon sorszámú tagok négyzetének különbségét, majd alakítsuk a különbséget az alábbiak szerint:

$$\begin{gathered}D_2=(1^2-2^2)+\left[(A-p)^2-(A-1)^2\right]+\left[(B+p)^2-(B+1)^2\right]+\\ +\left[(A+B-1)^2-(A+B-2)^2\right]=\\ =-3+(1-p)(2A-p-1)+(p-1)(2B+p+1)+(2A+2B-3)=\\ =2(A+B-3)+2(1-p)(A-B-p-1).\end{gathered}$$

Visszatérve az eredeti jelölésekre

$$\begin{gathered}A+B-3=(2pq+p)-(2q+1)=(p-1)(2q+1),\\ A-B-p-1=2q+1,\end{gathered}\tag{3}$$

ezek szerint D_2 utolsó alakjának két tagja egymás negatívja, bármely p, q értékpár esetén $D_2=0$, tehát az első állítás igaz.

Hasonlóan az (1) és (2) kifejezések köbeinek összegéből képezett D_3 különbség, mindjárt felhasználva az $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságot:

$$\begin{gathered}D_3=-7+(1-p)\left[(A-p)^2+(A-p)(A-1)+(A-1)^2\right]+\\ +(p-1)\left[(B+p)^2+(B+p)(B+1)+(B+1)^2\right]+\\ +\left[(A+B-1)^2+(A+B-1)(A+B-2)+(A+B-2)^2\right]=\\ =(1-p)\left[3(A^2-B^2)-3(p+1)(A+B)\right]+\left[3(A+B)^2-9(A+B)\right]=\\ =3(1-p)(A+B)(A-B-p-1)+3(A+B)(A+B-3),\end{gathered}$$

és ez – (3) figyelembevételével – azonosan 0, tehát az (1) és (2) kifejezések köbeiből képezett összegek is egyenlők bármely p, q értékpár esetén.

A negyedik hatványok összegeire az egyenlőség nem minden p, q értékpár esetén áll fenn, pl. $p=3$, $q=1$ esetén $1^4+5^4+4^4+8^4=4976\neq 2^4+7^4+2^4+7^4=4834$, és az ötödik hatványok összegei is különbözők.

Vannak viszont olyan p, q értékpárok, amelyekre az egyenlőség akárhányadik hatványokig fennáll, mert maguk az (1) és (2) számnégyesek is egymástól csak sorrendben különböznek. Ilyen pl. $p=q=0$, amikor (1) számai: 1, 2, 0, 1, a (2) számai pedig: 2, 1, 1, 0.

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Esetünkben nem nehéz megkeresni az összes olyan p, q értékpárokat, amelyekre az (1) és (2) kifejezések ugyanazt a négy számot adják, csak más sorrendben. Ilyenkor (1)-ben vagy a második, vagy a harmadik, vagy a negyedik szám 2.

Ha pl. $pq+2=2$, akkor vagy $p=0$ és q bármi lehet, vagy $q=0$ és p értéke tetszés szerinti. Az (1) és (2) alatti négy kifejezés

$p=0$ esetén:	1,	2,	$2q$,	$-2q+1$,	ill.	2,	1,	$-2q+1$,	$-2q$;
$q=0$ esetén:	1,	2,	p,	$p+1$,	ill.	2,	$p+1$,	1,	p.

Hasonlóan kapjuk, ha az (1) alatti második, ill. harmadik kifejezést tesszük 2-vel egyenlővé, hogy a két számnégyes sorrendtől eltekintve megegyezik, ha p értéke 1 vagy 2 és q akármi, továbbá ha $q=-\frac{1}{2}$, vagy -1 és p tetszés szerinti érték, és más esetben ez nem következik be.

Ezek szerint tetszés szerinti számú olyan p, q értékpár választható, amelyek mellett az (1) és (2) kifejezés-négyesek tetszés szerinti (nem negatív) kitevős hatványainak összegei egyenlők.