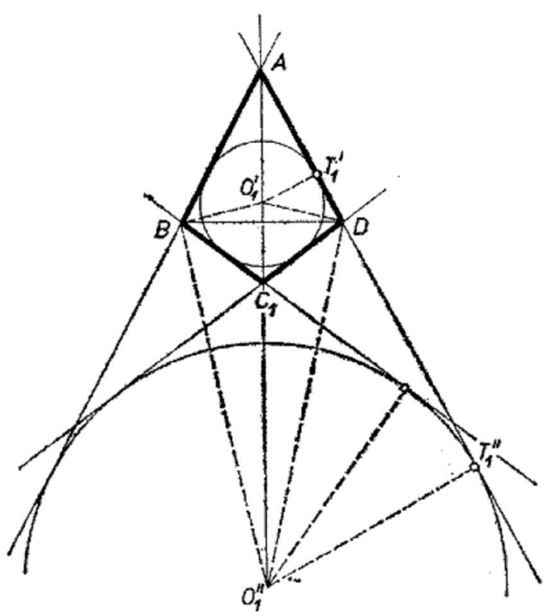
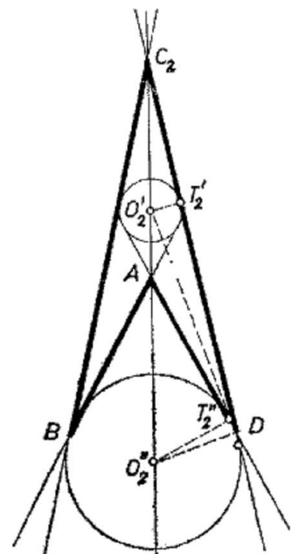
I. megoldás. Legyen a feltételeknek megfelelő $ABCD$ deltoid szimmetria-tengelye az AC egyenes, így $AC=21$, $BD=16$, továbbá $AB=17$ egység.

AC és BD metszéspontját M-mel jelölve az ABM derékszögű háromszögből Pythagorász tétele alapján $AM=15$. Ha C az AM szakasz M-en túli meghosszabbításán van, akkor ABC_1D konvex deltoid (1. ábra), ha pedig az A-n túli meghosszabbításon, akkor ABC_2D konkáv deltoid (2. ábra). Az előbbiben $MC_1=AC_1-AM=6$, és így $C_1B=10$, a másodikban $MC_2=AC_2+AM=36$, és így $C_2B=\sqrt{1360}=4\sqrt{85}$.

Mindkét deltoid esetében 2 olyan kör szerkeszthető, amely mindegyik oldal egyenesét érinti. Ugyanis a kör középpontja egyrészt az AC tengelyen van, ami az A-nál és C-nél levő szögek egybeeső felezője, másrészt például az AB, BC egyenespár közti szögek valamelyikének felezőjén; márpedig 2 szögfelező van, és mindegyik metszi a tengelyt, mert az ABC háromszög sem a konvex, sem a konkáv deltoid esetében nem egyenlő szárú. A metszéspontok körül az AB és BC egyeneseket érintő kört rajzolva, ez a szimmetria miatt az ezekre tükrös AD, DC egyeneseket is érinti.



1. *ábra*



2. ábra

Meggondolásunkat folytatva kiszámítjuk a körök középpontjának A-tól mért távolságát, majd ebből a sugarát. Messe a tengelyt az ABC_i háromszög B-nél levő belső szögének felezője O_i'-ben, a külső szögé O_i''-ben ($i=1,\ 2$). Ekkor a szögfelező osztásarányára ismert tétel szerint mindegyik középpont esetében

$$AO:C_iO=AB:C_iB,$$

és mivel a belső szögfelezők AC_i-vel való metszéspontjára $AO_i'+O_i'C_i=AC_i$, a külsőkre pedig $AO_1''-C_1O_1''=AC_1$, ill. $C_2O_2''-AO_2''=C_2A$ (ugyanis $AB>BC_1$ és $C_2B>AB$), azért

$$AO_i=AC_i\frac{AB}{AB+C_iB};\quad AO_1'=\frac{119}{6},\quad AO_2'=\frac{357}{17+4\sqrt{85}}=\frac{1}{3}(4\sqrt{85}-17);$$

$$AO_1''=AC_1\frac{AB}{AB-C_1B}=51,$$

$$AO_2''=AC_2\frac{AB}{C_2B-AB}=\frac{357}{4\sqrt{85}-17}=\frac{1}{3}(4\sqrt{85}+17).$$

Legyen végül a kör érintési pontja az AB egyenesen T (azaz T_1', T_1'', T_2', T_2''), akkor a közös hegyesszöggel bíró AOT és ABM derékszögű háromszögek hasonlóságából az érintő kör sugara bármelyik kör esetére

$$OT=r=MB\cdot\frac{AO}{AB}=\frac{8}{17}AO,$$

és a 4 körre rendre

$$r_1'=\frac{56}{9},\qquad r_1''=24,\qquad r_2'=\frac{8}{51}(4\sqrt{85}-17)\approx 3{,}12,$$

$$r_2''=\frac{8}{51}(4\sqrt{85}+17)\approx 8{,}45.$$

Király László (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)

II. megoldás. Az érintő körök sugarát megkaphatjuk a deltoid t területének kétféle kifejezéséből. Egyrészt $t = AC \cdot BD/2$, másrészt a belső érintő körök esetében, t ama négy háromszög területének összege, amelyekre a deltoid oszlik, ha csúcsait összekötjük a beírt kör középpontjával. E háromszögek alapjainak az egymás utáni oldalakat véve, magasságuk a beírt kör r'_i sugara, tehát

$$2t = r'_i(2AB + 2C_iB) = AC \cdot BD,$$
$$r'_1 = \frac{56}{9}, \qquad r'_2 = \frac{8}{51}(4\sqrt{85} - 17).$$

A külső érintő körök esetében a csúcsok és O''_i összekötésével előálló háromszögek területéből úgy kapjuk a deltoid területét, ha alkalmasan választott kettőjük területének összegéből kivonjuk a másik két háromszög területének összegét. A területeket ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat:

$$\begin{aligned} t &= ABO''_1D - C_1BO''_1D = (ABO''_1 + ADO''_1) - (C_1BO''_1 + C_1DO''_1) = \\ &= r''_1(AB - C_1B) = \frac{AC_1 \cdot BD}{2}, \\ t &= C_2BO''_2D - ABO''_2D = (C_2BO'_2 + C_2DO''_2) - (ABO''_2 + ADO''_2) = \\ &= r''_2(C_2B - AB) = \frac{AC_2 \cdot BD}{2}; \end{aligned}$$
$$r''_1 = \frac{AC_1 \cdot BD}{2(AB - C_1B)} = 24, \qquad r''_2 = \frac{AC_2 \cdot BD}{2(C_2B - AB)} = \frac{8}{51}(4\sqrt{85} + 17).$$

Berkes István (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Több versenyző a koordináta-geometria módszereivel is megoldotta a feladatot.