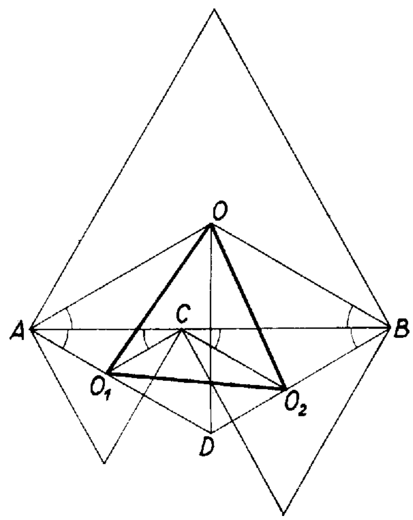
I. megoldás. Legyen az AC, CB, AB szakasz fölé az előírt módon szerkesztett egyenlő oldalú háromszög középpontja rendre O_1, O_2, O. Elég megmutatnunk, hogy $OO_1 = OO_2$, és hogy a köztük levő szög 60°, más szóval, hogy O_1-et O körül 60°-kal elforgatva O_2-be jut.



1. ábra

A vizsgálandó középpontokat a megfelelő háromszög alapjának végpontjaival összekötő egyenesek AB-vel 30°-os szöget zárnak be. Ezért AO_1, CO_2 és BO, valamint CO_1, BO_2 és AO párhuzamosak, AO_1 és BO_2 metszéspontját D-vel jelölve az $OADB$ idom 60°-os hegyes szögű rombusz, OAD és ODB pedig egybevágó szabályos háromszögek. Másrészt CO_1DO_2 paralelogramma, és ACO_1 egyenlő szárú háromszög, ezért $DO_2 = O_1C = AO_1$. O_1 az AD szakaszon van, O_2 pedig DB-n, mert C belső pontja az AB szakasznak, így az OAD háromszöget O körül ODB-re forgatva O_1 az O_2-re jut. E forgatás szöge 60°. Ezt akartuk megmutatni.

Hirka Ferenc (Budapest, Piarista g. I. o. t.)

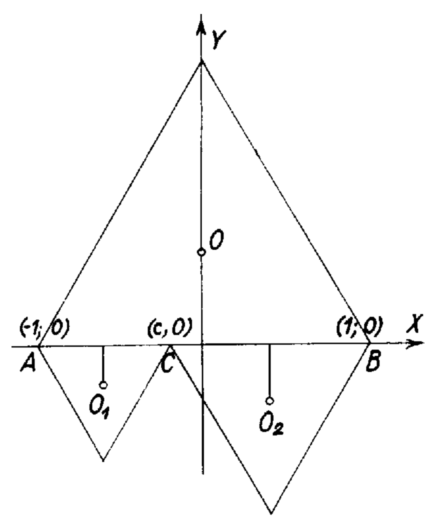
Megjegyzések. 1. Hasonlóan könnyen belátható, hogy az O_1O_2C háromszöget O_1 körül 60°-kal elforgatva O_2 az O-ba jut.

2. Az állítás elfajuló esete a következő tételnek: bármely háromszög oldalai fölé kifelé egyenlő oldalú háromszögeket szerkesztve, ezek középpontjai egy szabályos háromszög csúcsai. Itt az ABC háromszög az AB egyenesszakasszá fajult el. – Az idézett állítás befelé szerkesztett egyenlő oldalú háromszögekkel is helyes marad. Ennek is elfajult esete a bebizonyított állítás.

Berkes István (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Sokan koordinátageometriával oldották meg a feladatot, ilyen a

II. megoldás. Válasszuk X-tengelynek az AB egyenest, Y-tengelynek az AB szakasz felező merőlegesét, egységnek az AB szakasz felét. Ekkor az egyes pontok koordinátái $A(-1;1)$, $B(0;1)$, $C(c,0)$, ahol $-1 < c < 1$.



2. ábra

A szabályos háromszögek oldalainak hossza 2, $1+c$, $1-c$, magasságainak harmada (a középpontok ordinátáinak abszolút értéke) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $(1+c)\frac{\sqrt{3}}{6}$, $(1-c)\frac{\sqrt{3}}{6}$. A szabályos háromszögek középpontjainak abszcisszái, amelyek megegyeznek az AB, AC, BC szakaszok felező pontjának abszcisszáival: 0, $\frac{-1+c}{2}$, $\frac{1+c}{2}$. Így a középpontok koordinátái:

$$O\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ O_1\left(\frac{-1+c}{2},\ -\frac{(1+c)\sqrt{3}}{6}\right),\ O_2\left(\frac{1+c}{2},\ -\frac{(1-c)\sqrt{3}}{6}\right).$$

Számítsuk ki az OO_1O_2 háromszög oldalainak a négyzetét:

$$OO_1^2 = \left(\frac{-1+c}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(1+c)\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{(1-c)^2}{4} + \frac{\big((3+c)\sqrt{3}\big)^2}{36} = 1 + \frac{c^2}{3},$$

$$O_1O_2^2 = \left(\frac{1+c}{2} - \frac{-1+c}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(1-c)\sqrt{3}}{6} + \frac{(1+c)\sqrt{3}}{6}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{\big(2c\sqrt{3}\big)^2}{36} = 1 + \frac{c^2}{3},$$

$$O_2O^2 = \left(-\frac{1+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{(1-c)\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{(1+c)^2}{4} + \frac{\big((3-c)\sqrt{3}\big)^2}{36} = 1 + \frac{c^2}{3}.$$

Ezek egyenlők, tehát az OO_1O_2 háromszög szabályos.

Techet Károly (Budapest, József A. g. II. o. t.)