

I. A vizsgálandó kifejezést a képezési előírás alapján kifejezzük a sorozat-pár 1-gyel korábbi tagjaival:

$$\begin{aligned} x_k^2 - 3y_k^2 &= (4 - 3)x_{k-1}^2 + (12 - 12)x_{k-1}y_{k-1} + (9 - 12)y_{k-1}^2 = \\ &= x_{k-1}^2 - 3y_{k-1}^2. \end{aligned}$$

Eszerint a kifejezés értéke minden k -ra annyi, mint az x_1, y_1 számpárra:

$$(2) \quad x_k^2 - 3y_k^2 = x_1^2 - 3y_1^2 = 1.$$

II. Sorozataink első 6-6 tagja:

$$\begin{array}{cccccc} k = 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6; \\ x_k = 2, & 7, & 26, & 97, & 362, & 1351; \\ y_k = 1, & 4, & 15, & 56, & 209, & 780; \end{array}$$

másrészt a $d = \sqrt{3} - 1$ számnak a 830. gyakorlatban talált lánc tört kifejtése:

$$(3) \quad d = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Mivel (2)-ből

$$(4) \quad \left(\frac{x_k}{y_k}\right)^2 = 3 + \frac{1}{y_k^2},$$

tehát x_k/y_k annál jobb (felső) közelítő értéket ad $\sqrt{3}$ -ra, minél nagyobb y_k , így várható, hogy az ugyancsak $\sqrt{3}$ -ra közelítő értéket adó $d_j + 1$ közelítő törtek lesznek szoros kapcsolatban sorozatainkkal. Ezek az értékek $j = 1, 2, \dots, 12$ -re

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \frac{3691}{2131}.$$

Látjuk, hogy a páratlan sorszámúak rendre megegyeznek az x_k/y_k hányadossal $k = 1, 2, \dots, 6$ -ra. Ezekre a k értékekre tehát

$$(5) \quad d_{2k-1} = \frac{x_k}{y_k} - 1 = \frac{x_k - y_k}{y_k}.$$

Az itt a számlálóban fellépő különbségek szerepelnek mindig a megelőző ($d_{2(k-1)}$) közelítő tört nevezőjében is. A páros sorszámú közelítő törtek számlálója pedig mindig 2-szerese az előző páratlan sorszámú közelítő tört nevezőjének, az y -sorozat megfelelő tagjának, pl. a $d_4 + 1 = 19/11$ -ből adódó $d_4 = 8/11$ -ben a számláló 2-szerese a d_3 nevezőjének. Végül azt is látjuk, hogy az $x_k - y_k$ különbség $k = 2$ -től kezdve egyenlő az x és y sorozatok előző sorszámú tagjainak összegével:

$$7 - 4 = 2 + 1, \quad 26 - 15 = 7 + 4, \quad \dots, \quad 1351 - 780 = 362 + 209.$$

Ezek szerint a következő további összefüggéseket látjuk:

$$(6) \quad x_{k+1} - y_{k+1} = x_k + y_k, \quad \text{ha } k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$(7) \quad d_{2k} = \frac{2y_k}{x_k + y_k}, \quad \text{ha } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

A (7) összefüggés felírásában már felhasználtuk (5)-öt. – Megmutatjuk, hogy ezek minden további (pozitív egész) k -ra érvényesek. (6) helyessége közvetlenül adódik (1)-ből, k helyére $k + 1$ -et írva:

$$x_{k+1} - y_{k+1} = (2x_k + 3y_k) - (x_k + 2y_k) = x_k + y_k.$$

Tegyük fel, hogy (5) érvényes a k indexre, írjunk a jobb oldalon k helyett $k + 1$ -et, és képezzük a kapott tört kifejezés lánc tört kifejtését (1) figyelembevételével a harmadik nevezőig:

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - y_{k+1}}{y_{k+1}} &= \frac{x_k + y_k}{x_k + 2y_k} = \frac{1}{\frac{x_k + 2y_k}{x_k + y_k}} = \frac{1}{1 + \frac{y_k}{x_k + y_k}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x_k + y_k}{y_k}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{x_k - y_k}{y_k}}} = \frac{1}{2 + d_{2k-1}}. \end{aligned}$$

Az utolsó átalakításban felhasználtuk, hogy a második nevezőben az egész számhoz hozzáadandó kifejezés (5) jobb oldala. Az utolsó alak valóban a (3) lánc tört-kifejtés $2k + 1$ -edik közelítő törtje: d_{2k+1} . Ezt ugyanis úgy kapjuk, hogy a $2k + 1$ -edik nevezőben elhagyjuk az egész számhoz hozzáadandó számot – pl. $d_1 = \frac{1}{1}$ –, másrészt rövidítve éppen a kapott utolsó alakban írhatjuk: az első két nevező kiírása után 1-es rész-nevező következik, a további rész-nevezők váltakozva 1 és 2, és számuk [1]¹ $(2k + 1) - 2 = 2k - 1$. Ha tehát (5) érvényes valamely k természetes számra, akkor a következő természetes számra is érvényes, azaz minden természetes számra.

Végül feltéve (7) érvényességét a k indexre, és a jobb oldalon k helyén $k + 1$ -et írva az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy (7) minden természetes k számra érvényes:

$$\begin{aligned} \frac{2y_{k+1}}{x_{k+1} + y_{k+1}} &= \frac{2x_k + 4y_k}{3x_k + 5y_k} = \frac{1}{\frac{3x_k + 5y_k}{2x_k + 4y_k}} = \frac{1}{1 + \frac{x_k + y_k}{2x_k + 4y_k}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2x_k + 4y_k}{x_k + y_k}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2y_k}{x_k + y_k}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + d_{2k}}} = d_{2(k+1)}. \end{aligned}$$

Ezzel befejeztük annak bizonyítását, hogy megfigyeléseink minden k -ra érvényesek.

Herényi István (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (4) összefüggés mutatja, hogy $x_k/y_k = d_{2k-1} + 1$ fölülről közelíti meg $\sqrt{3}$ -at. Hasonlóan adódik, hogy $d + 1$ kifejtése páros indexű közelítő törtjeinek négyzetei mindig kisebbek 3-nál, de az eltérés k növekedésével csökken; (7) és (2) szerint ugyanis

$$3 - (d_{2k} + 1)^2 = 3 - \left(\frac{x_k + 3y_k}{x_k + y_k} \right)^2 = \frac{2(x_k^2 - 3y_k^2)}{(x_k + y_k)^2} = \frac{2}{(x_k + y_k)^2}.$$

2. Kapcsolatban áll feladatunk az 1219. feladattal is.² Eredményeinket alkalmasan felhasználva további egész oldalhármásokat írhatunk fel.

¹Ezt a felismerést már a 830. gyakorlatban, c_3, c_4, d_3, d_4 kiszámításában felhasználtuk egyszerűsítésként.

²K.M.L. 27 (1963/11) 121.o.