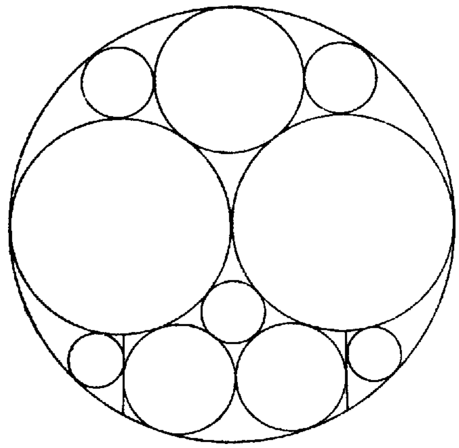
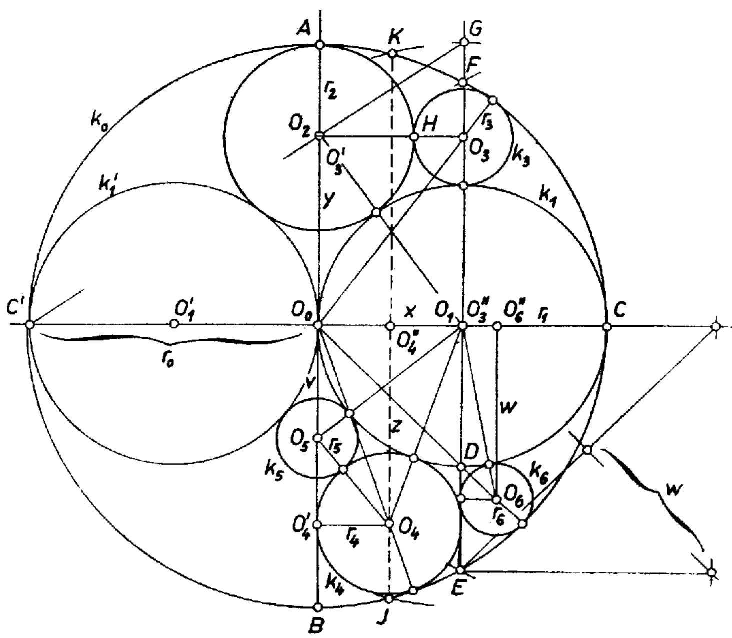
a) Az alábbi 3 észrevételre támaszkodva alkalmas sorrendben kifejezzük a körök sugarait és középpontjuk távolságát az ábra alkalmas pontjaitól, az ábra befoglaló körének sugarával, ezek alapján az ábra megszerkeszthető lesz. A 2. ábra jelöléseit használjuk.



1. ábra



2. ábra

I. Az 1. ábrán 11 kör és 2 egyenesszakasz látható; az ábra szimmetrikus a 2. ábra AB egyenesére.

II. A k_1 és k_1' körök AB-nek O_0 felezőpontjában érintik egymást.

III. A DE egyenesszakasz párhuzamos AB-vel.

Az I. észrevétel szerint AB a k_0 kör átmérője, O_0 a középpontja. A 4 tükrös körpárból, valamint az egyenesszakasz–párból elég 1–1 kört, ill. szakaszt megszerkesztenünk, továbbá felhasználhatjuk, hogy O_2 és O_5 az AB átmérőn van. II. szerint az O_0O_1 egyenes ugyancsak átmérőt metsz ki k_0-ból, ezen van k_0 és k_1 érintkezési pontja, C, és így $r_1 = r_0/2$.

Az $O_1O_2O_0$ derékszögű háromszögben k_1 és k_2 érintkezése miatt $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_0O_2 = r_0 - r_2$, mert k_2 A-ban érinti k_0-t, és így Pythagoras tétele alapján

$$O_1O_2^2 - O_0O_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_0 - r_2)^2 = (2r_2 + r_1 - r_0)(r_0 + r_1) =$$
$$= O_0O_1^2 = r_1^2,$$
$$r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{r_0 + r_1} + r_0 - r_1\right) = \frac{r_0}{3}.$$

Legyen O_3 vetülete AB-n O_3', O_0C-n O_3'', és $O_0O_3' = O_3''O_3 = y$, $O_0O_3'' = O_3'O_3 = x$. k_3 érintkezései miatt $O_0O_3 = r_0 - r_3$, $O_1O_3 = r_1 + r_3$, $O_2O_3 = r_2 + r_3$, és így az $O_0O_3O_3'$, $O_1O_3O_3''$, $O_2O_3O_3'$ derékszögű háromszögekből

$$x^2 + y^2 = (r_0 - r_3)^2, \tag{1}$$

$$(x - r_1)^2 + y^2 = (r_1 + r_3)^2, \tag{2}$$

$$x^2 + (y - 2r_2)^2 = (r_2 + r_3)^2, \tag{3}$$

ugyanis $O_1O_3'' = |O_0O_3'' - O_0O_1| = |x - r_1|$, másrészt a fentiek szerint $O_0O_2 = r_0 - r_2 = 2r_2$, és így hasonlóan $O_2O_3' = |y - 2r_2|$. Kivonva (1)-ből (2)-t, majd (3)-at, és felhasználva a kínálkozó szorzattá alakítási lehetőségeket, valamint eddigi eredményeinket:

$$r_1(2x - r_1) = (r_0 + r_1)(r_0 - r_1 - 2r_3), \qquad x = r_0 - 3r_3,$$
$$4r_2(y - r_2) = (r_0 + r_2)(r_0 - r_2 - 2r_3), \qquad y = r_0 - 2r_3,$$

és ezeket (1)-be helyettesítve

$$12r_3^2 - 8r_0r_3 + r_0^2 = 0,$$

amiből $r_3' = r_0/6$, $r_3'' = r_0/2$. A második gyökkel $x = -r_1$, $y = 0$, vagyis $O_3'' = O_1'$ és k_1'-t kapjuk, amely valóban ugyancsak belülről érinti k_0-t, és kívülről érinti k_1-et, k_2-t, most azonban nem ezt keressük. Így $r_3 = r_0/6$, $x = r_0/2 = r_1$, $y = 2r_0/3$, vagyis $O_3'' = O_1$, $O_3 = O_2$.

k_4 érinti k_0-t, k_1-et és AB-t, így O_4O_1''-t z-vel jelölve az $O_0O_4O_4''$ és $O_1O_4O_4''$ derékszögű háromszögekből, $O_4O_4'' = O_4'O_4 = r_4$ figyelembevételével

$$r_4^2 + z^2 = (r_0 - r_4)^2, \qquad (r_1 - r_4)^2 + z^2 = (r_1 + r_4)^2.$$

z kiküszöbölésével $r_4 = r_0/4$, ebből pedig $z = r_0/\sqrt{2}$.

k_5 érinti k_1-et és k_4-et, és O_5 az AB-n van; $O_0O_5 = v$ jelöléssel $O_5O_4' = z - v$, és az $O_0O_1O_5$, $O_4O_4'O_5$ derékszögű háromszögekből

$$v^2 = (r_1 + r_5)^2 - r_1^2, \qquad (z - v)^2 = (r_4 + r_5)^2 - r_4^2.$$

Az utóbbit az előbbiből kivonva

$$2zv = z^2 + 2(r_1 - r_4)r_5, \qquad v = (r_0 + r_5)/2\sqrt{2},$$

és ezt az előbbibe helyettesítve

$$7r_5^2 + 6r_0r_5 - r_0^2 = 0, \qquad \text{amiből } r_5' = -r_0/7, \qquad r_5'' = -r_0.$$

A második gyökkel $v = 0$, vagyis ekkor a keresett kör középpontja azonos O_0-lal, és a sugár abszolút értéke r_0. Eszerint k_5''-ként maga k_0 jön szóba. Valóban k_0 megfelel a fenti követelményeknek, de k_1-gyel és k_4-gyel belső érintkezésben van a várt külső érintkezéssel szemben; ezt fejezi ki r_5'' negatív volta. A számunkra megfelelő gyök $r_5 = r_0/7$, evvel $v = 4r_0/7\sqrt{2} = 4z/7$.

A III. észrevétel szerint a DE szakasz távolsága AB-től $2r_4 = r_0/2 = r_1$, vagyis DE meghosszabbítása átmegy O_1-en.

Végül k_6 érinti k_0-t belülről, k_1-et kívülről és a DE egyenest. Az $O_0O_6O_6''$ és $O_1O_6O_6''$ derékszögű háromszögekből $O_6O_6'' = w$ jelöléssel, felhasználva az előbbi megállapítást is,

$$w^2 = (r_0 - r_6)^2 - (r_1 + r_6)^2 = (r_1 + r_6)^2 - r_6^2,$$

amiből $r_6 = r_0/8$, és $w = \sqrt{3}r_0/2\sqrt{2}$.

b) Mindezek alapján az 1. ábra pl. a következő lépésekben szerkeszthető:

–**1.** Az r_0 sugarú k_0 körben megrajzoljuk az egymásra merőleges AB és CC' átmérőket.

– **2.** C körül r_0 sugárral k_0' kört írunk, ez k_0-t az E, F pontokban (F az AC negyedköríven), az EF egyenes CC'-t O_1-ben metszi. Megszerkesztjük e vonalak AB-re való tükörképét (ezt a továbbiak során is mindig megtesszük, bár külön nem említjük). Az O_1 körül O_1O_0 sugárral írt kör k_1, ennek EF-fel való metszéspontja D, a CC'-nek B-t tartalmazó partján.

– **3.** Az O_1F félegyenesre felmérjük az $O_1G = r_0$ szakaszt, a $C'G$ egyenessel AB-ből kimetsszük O_2-t, az O_2 körül O_2A sugárral írt kör k_2.

– **4.** Az O_2-n átmenő, CC'-vel párhuzamos egyenes EF-et O_3-ban, k_2-t H-ban metszi (AB-nek C-t tartalmazó partján), az O_3 körül O_3H sugárral írt kör k_3.

– **5.** Az O_1 körül r_0 sugárral írt kör k_0-t J-ben és K-ban metszi, a JK egyenes CC'-ből kimetszi O_4''-t; felmérjük O_0D-t az O_0B és $O_4''J$ félegyenesre, a végpont O_4', ill. O_4, az O_4 körül O_4O_4' sugárral írt kör k_4.

– **6.** Az O_0O_4' szakaszt 7 egyenlő részre osztjuk, az O_0-tól számított negyedik osztópont O_5; az O_4O_5 félegyenesnek k_4-gyel való metszéspontja[1] N; az O_5 körül O_5N sugárral írt kör k_5. – **7.** Az O_1C szakaszt 4 egyenlő részre osztjuk, az O_1-től számított első osztópont O_6''; O_1E oldalú négyzetet szerkesztünk, ennek középpontja P; az O_1P szakaszt felmérjük az O_6''-ben CC'-re állított merőlegesre (a B-t tartalmazó parton), a végpont O_6; végül az O_6 körül O_1O_6'' sugárral írt kör k_6.

A közölt eljárás lépéseinek helyessége az *a)* részben végzett számítások alapján bizonyítható. Ennek végrehajtását – hely hiányában – az olvasóra hagyjuk.

[1] Az ábrán N és az alábbi P pótlandó.

Treer Mária (Budapest, Kaffka M. g. III. o. t.)

Kotsis Erzsébet Kinga (Budapest, Fehérvári úti 12 évf. isk. II. g. o. t.)

Megjegyzés. Inverzió módszerével [2] a szerkesztés számítások nélkül is elvégezhető, másrészt a számítások nagy része is egyszerűbben végezhető.

Arányi Péter (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

[2] Lásd pl. Faragó László–Forgó Péterné: Geometriai szerkesztések 2. kiadás (Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954) 19–27. o.