Elég kiszámítani a négyzetgyökök közelítő értékét az első négy tizedes jegyig:

$$\sqrt{330} = 18,\ 1659\ldots;,\quad \sqrt{230} = 15,\ 1657\ldots,$$

ezekből a különbség kisebb, mint

$$18{,}1660 - 15{,}1657 = 3{,}0003,$$

tehát ezredrészre kerekítve valóban 3,000.

Hasonló tulajdonságú számpárokat keresve megjegyezzük, hogy az adott négyzetgyökök egész része többszöröse 3-nak, közelítő értékük tört része közel áll $1/6 = 0{,}1666\ldots$-hoz, tehát a két négyzetgyöknek egy–egy közelítő értéke a

(1)
$$3k + \frac{1}{6}$$

szám, ahol $k = 6$, ill. 5. Figyelembe véve az 1211. feladat megoldását[1], azt sejtjük, hogy mindenesetre megfelelő számpárt kapunk, ha a

$$\left(3k + \frac{1}{6}\right)^2 = 9k^2 + k + \frac{1}{36}$$

kifejezést – ahol k-t továbbra is egész számnak gondoljuk – egészre kerekítjük, az így kapott $9k^2 + k$ kifejezésbe egymás után behelyettesítjük a $k = 7,\ 8,\ 9,\ \ldots$ számokat: 448, 584, 738, 910, 1100, …, és vesszük az így adódó számsorozat bármely két egymás utáni tagját.

Megmutatjuk, hogy e sorozat bármely két egymás utáni tagjának

(2)
$$\sqrt{9(k+1)^2 + (k+1)} - \sqrt{9k^2 + k}$$

különbsége valóban 1/1000-nél kevesebbel tér el 3-tól. A két tag egész része $3k$, ill. $3(k+1)$, ugyanis pl.

$$3k = \sqrt{9k^2} < \sqrt{9k^2 + k} < \sqrt{9k^2 + 6k + 1} = 3k + 1,$$

tehát az egész részek különbsége 3. További részük pedig mindig $\frac{1}{6} - \frac{1}{1000}$ és $\frac{1}{6}$, azaz $0{,}165\,666\ldots$ és $0{,}166\,666\ldots$ közé esik, ugyanis (1)-nek és (2) második tagjának különbségére felső korlátot kapunk, ha a számlálót gyökteleníthjük, majd a nevező mindkét tagja helyett a kisebb $3k$-t írjuk:

$$\left(3k + \frac{1}{6}\right) - \sqrt{9k^2 + k} = \frac{\left(3k + \frac{1}{6}\right)^2 - (9k^2 + k)}{3k + \frac{1}{6} + \sqrt{9k^2 + k}} < \frac{\frac{1}{36}}{3k + 3k} = \frac{1}{216k},$$

és ez a felső korlát $k \geqq 6$ esetén kisebb 1/1000-nél. Így (2) tagjaiban az egész rész utáni részek egymástól való eltérése is kisebb 1/1000-nél. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Tetszés szerinti számú olyan számpárt kaptunk tehát, melyeknél szintén fennáll az adottakra kimondott tulajdonság. Egyébként a nyert sorozat szomszédos tagjainak már $k = 3$-tól kezdve megvan a kérdéses tulajdonsága: $\sqrt{38} = 6{,}1644\ldots$, $\sqrt{84} = 9{,}1651\ldots$, $\sqrt{148} = 12{,}1655\ldots$, az egész utáni részek különbsége az első kettő esetében még fölötte, az utóbbi kettőében már alatta van $5/10^4$-nek.

Siket Aranka (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fenti számsorozat csupán egyike az alább vázolt meggondolás szerint nyerhető sorozatoknak, melyek egymás utáni szomszédos tag-párjai szintén egyre kisebb számmal térnek el a 3-tól. Legyen a, b természetes számpár és $\sqrt{a} - \sqrt{b} \approx 3$. Ekkor

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \approx \frac{a - b}{3},$$

így a négyzetgyökök összegében az egész utáni résznek egy közelítő értéke 1/3, vagy 2/3, vagy 0, tehát

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = m + n/3,$$

ahol m természetes szám és $n = 0$, vagy 1, vagy 2. Így

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) - \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = 2\sqrt{b} \approx (m - 3) + n/3,$$

(3)
$$\sqrt{b} \approx p + \frac{q}{6}, \quad \sqrt{a} \approx p + 3 + \frac{q}{6},$$

[1] K.M.L. 27 (1963/10) 59. o.; elolvasását a szerkesztőség ajánlotta a kitűzéssel egyidejűen.

ahol p természetes szám és q az 1, 2, 3, 4, 5 számok egyike (kizártuk a $q=0$ értéket, mert arra az érdektelen esetre vezet, melyben $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ egészek).

A fenti sorozat (3)-ból a $p=3k$ és $q=1$ esetben adódik, ha $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ négyzetét lefelé kerekítjük. Hasonlóan $p=3k+1$, és $q=2$ esetén és felfelé kerekítéssel a és b a $9k^2+8k+2$ (k egész) sorozat tagjai. A fentiekhez hasonlóan lehet általában bizonyítani, hogy a kívánt tulajdonság fennáll bármely szomszédos tagpárra, hacsak k-t nagyobbnak választjuk egy bizonyos értéknél (itt $k=8$-tól kezdve: $\sqrt{642}=25{,}337\,71\ldots$, $\sqrt{803}=28{,}337\,25\ldots$).

2. Nyilvánvaló, hogy nem adtunk meg minden megfelelő számpárt. Nagyobb x-eket véve a $\sqrt{x}$ függvény növekedése kisebb mértékű, pl. 10^6 négyzete: 10^{12} után $2\cdot 10^6+1$ egységgel következik az első négyzetszám, a tizedes vessző utáni rész változása is egyre lassúbb, ezért egy–két kezdő tizedes jegy megismétlődésében semmi váratlan nincs. Pl. $10^6-25/10^5$ és $10^6+25/10^5$ négyzetei: $10^{12}-500+625/10^{10}$, ill. $10^{12}+500+625/10^{10}$ között 1000 természetes szám van, és közülük 999 nem teljes négyzet, hasonlóan a $10^6+3\pm 25/10^5$ számok négyzetei: $(10^6+3)^2\pm 500\pm 15/10^4+625/10^{10}$ között 1000 nem teljes négyzet van; véve mármost a gyanánt az utóbbiak, b gyanánt az előbbiek bármelyikét: 999 000 olyan a, b egész számpárt kaphatunk, melyekre $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ a $3\pm 5/10^4$ számok közé esik, tehát ezredrészre kerekítve 3,000-t ad.