A vizsgálandó kifejezések:

$$x^2 - y^2 = m^6 + (2p-9)m^4n^2 + (p^2-6q)m^2n^4 - q^2n^6, \tag{1}$$
$$x^2 - 3y^2 = m^6 + (2p-27)m^4n^2 + (p^2-18q)m^2n^4 - 3q^2n^6. \tag{2}$$

I. A követelmény (1)-re akkor teljesül, ha találunk olyan r egész számot, amellyel $m^2 - rn^2$ köbe azonos (1) jobb oldalával, vagyis a két kifejezés együtthatói páronként megegyeznek:

$$2p - 9 = -3r, \tag{3}$$
$$p^2 - 6q = 3r^2, \tag{4}$$
$$q^2 = r^3, \tag{5}$$

és amellyel p, q is egészek. Eszerint q^2-nek teljes köbnek kell lennie, akkor pedig egyszersmind teljes hatodik hatvány is: $q^2 = s^6$, ahol s egész szám, ezért egyrészt $q = \pm s^3$, másrészt $r^3 = s^6$-ból $r = s^2$. Így (3)-ból

$$p = \frac{1}{2}(9 - 3r) = \frac{1}{2}(9 - 3s^2),$$

tehát (4)-ből

$$\frac{1}{4}(81 - 54s^2 + 9s^4) \mp 6s^3 = 3s^4,$$
$$s^2(s^2 \pm 8s + 18) = 27.$$

Ennek alapján kevés próbálgatással meghatározhatjuk a megfelelő p, q, r számokat. s^2 négyzetszám, és osztója 27-nek, így csak $s^2 = 1$ és $s^2 = 9$ jön szóba.

$$s^2 = r = 1 \quad \text{esetén (3)-ból} \quad p = 3, \quad \text{és így (4)-ből} \quad q = 1;$$
$$s^2 = r = 9 \quad \text{esetén (3)-ból} \quad p = -9, \quad \text{és így (4)-ből} \quad q = -27.$$

Mindkét esetben (5) is teljesül, tehát két megfelelő p; q értékpár van:

$$p = 3,\ q = 1 \quad \text{esetén} \quad x^2 - y^2 = (m^2 - n^2)^3,$$
$$p = -9,\ q = -27 \quad \text{esetén} \quad x^2 - y^2 = (m^2 - 9n^2)^3.$$

II. Hasonlóan (2) jobb oldala azonos az $(m^2 - Rn^2)^3$ kifejezéssel, ha

$$2p - 27 = -3R, \tag{6}$$
$$p^2 - 18q = 3R^2, \tag{7}$$
$$3q^2 = R^3, \tag{8}$$

ahol R egész szám. (8)-ból R osztható 3-mal, $R = 3S$, így $q^2 - 9S^3$, majd $S = T^2$, (S, T egész), tehát $q = \pm 3T^3$ és $R = 3T^2$. Most már (6)-ból, majd (7)-ből

$$p = \frac{1}{2}(27 - 3R) = \frac{9}{2}(3 - T^2), \quad \frac{81}{4}(9 - 6T^2 + T^4) \mp 54T^3 = 27T^4,$$
$$T^2(T^2 \pm 8T + 18) = 27.$$

Eszerint T^2 értéke 1 vagy 9, ezért R értéke 3, ill. 27, így (6)-ból, majd (7)-ből az első esetben $p = 9$, $q = 3$, a második esetben $p = -27$, $q = -81$, és mindkét esetben (8) is teljesül. Ezek szerint az adott kifejezésekkel

$$p = 9, \quad q = 3 \quad \text{esetén} \quad x^2 - 3y^2 = (m^2 - 3n^2)^3.$$
$$p = -27, \quad q = -81 \quad \text{esetén} \quad x^2 - 3y^2 = (m^2 - 27n^2)^3.$$

Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Malina János (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)